

יחידה 7: חבורות

7.1 פעולות בינאריות



המחשבון המסתורי

דני מצא מחשבון ישן ומסתורי.

על המחשבון הוא זיהה את המקשים של הספרות ואת המקש $=$ אך לא הצליח לזהות את מקשי פעולות החשבון הרגילות.

ננסה לפענח אילו פעולות מבצעים המקשים השונים במחשבון של דני.

זוהה את הפעולה

1. לפניכם תרגילים שביצע דני, והתוצאות שקיבל. מהי לדעתכם המשמעות של כל אחד מהמקשים?

$$1 \spadesuit 5 = 12$$

$$7 \clubsuit 3 = 20$$

$\clubsuit$ מקש: $2/3$ מה: $a \clubsuit b = 2 \cdot (a + b)$

$$3 \clubsuit 2 = 10$$

$$2 \clubsuit 7 = 18$$

$$8 \clubsuit 4 = 24$$

$$4 \clubsuit 4 = 16$$

משמעות המקש: $a \clubsuit b = 2 \cdot (a + b)$

ב. מקש $\spadesuit$

$$2 \spadesuit 6 = 4$$

$$7 \spadesuit 1 = 4$$

$$7 \spadesuit 2 = 4.5$$

$$4 \spadesuit 1 = 2.5$$

$$2 \spadesuit 0 = 1$$

$$4 \spadesuit 2 = 3$$

א. מקש $\heartsuit$

$$3 \heartsuit 5 = 11$$

$$2 \heartsuit 1 = 5$$

$$4 \heartsuit 6 = 14$$

$$11 \heartsuit 3 = 25$$

$$7 \heartsuit 5 = 19$$

$$20 \heartsuit 6 = 46$$

ד. מקש $\diamondsuit$

$$2 \diamondsuit 6 = 20$$

$$2 \diamondsuit 18 = 56$$

$$3 \diamondsuit 3 = 15$$

$$20 \diamondsuit 3 = 83$$

$$5 \diamondsuit 10 = 65$$

$$2 \diamondsuit 100 = 302$$

ג. מקש $\star$

$$2 \star 6 = 10$$

$$7 \star 1 = 50$$

$$3 \star 3 = 12$$

$$4 \star 1 = 17$$

$$5 \star 0 = 25$$

$$4 \star 2 = 18$$

2. לפניכם תרגילים עם פעולות המקשים     שחקרתם. השלימו מספרים מתאימים.

א. מקש  $10 \heartsuit 3 = \square$ $11 \heartsuit \square = 40$ $\square \heartsuit 16 = 76$ $21 \heartsuit \square = 100$	ב. מקש  $15 \spadesuit 47 = \square$ $\square \spadesuit 23 = 52.5$ $10 \spadesuit \square = 4$ $\square \spadesuit \square = 5$
ג. מקש  $4 \star 5 = \square$ $-3 \star -2 = \square$ $4 \star \square = 17$ $\square \star 3 = 12$	ד. מקש  $1 \diamond 1 = \square$ $3 \diamond 10 = \square$ $2 \diamond \square = 11$ $\square \diamond \square = 5$

הגדרה:

פעולה בינארית על מספרים היא פעולה המתבצעת בין שני מספרים (לא בהכרח שונים זה מזה), ואשר נותנת כתוצאה מספר יחיד.
מחצה: כל פעולות החשבון שהכרנו כעת הן פעולות בינאריות על מספרים.
 פעולת מציאת הנגדי למספר **איננה** פעולה בינארית, כי היא פועלת על מספר אחד.

תכונות של פעולות בינאריות

3. דני ניסה לחשב במחשבון המסתורי את התרגיל $7 \heartsuit 1$. הוא שגה והפך בטעות את הסדר בין המספר הראשון והמספר השני בתרגיל.
 א. מהי התוצאה (השגויה) של דני, ומהי התוצאה הנכונה של תרגיל זה?
 ב. מה יקרה אם דני יחזור על הטעות של היפוך סדר המספרים בפעולות האחרות?

4. האם הפעולות $\heartsuit$ $\spadesuit$ $\clubsuit$ $\diamondsuit$ הן חילופיות? אם כן, הסבירו. אם לא, בכל פעולה שאינה חילופית, הביאו דוגמאות לתרגילים שבהם שינוי סדר המספרים נותן תוצאות שונות.

5. א. הביאו שתי דוגמאות נוספות לפעולות חילופיות.
לכל פעולה כזאת, כתבו שלושה זוגות תרגילים $(b * a - a * b)$ שידגימו את תכונת החילופיות.

ב. הביאו שתי דוגמאות נוספות לפעולות שאינן חילופיות.
לכל פעולה כזאת, כתבו שלושה זוגות של תרגילים $(b * a - a * b)$, שיראו כי תכונת החילופיות אינה מתקיימת לגבי פעולות אלה.

6. א. דני אמר: "תוצאת החיבור הרגיל בין 0 לבין כל מספר אחר היא תמיד המספר האחר. כנראה שזה נכון גם לגבי הפעולה $\heartsuit$ ".

הוא רשם את התרגילים: $0 \heartsuit 2$ $0 \heartsuit 6$ $3 \heartsuit 0$
האם השערתו של דני נכונה?

ב. אלונה אמרה: "תוצאת הכפל הרגיל בין 1 לבין כל מספר אחר היא תמיד המספר האחר. כנראה שזה נכון גם לגבי הפעולה $\heartsuit$ ".

היא רשמה את התרגילים: $1 \heartsuit 2$ $1 \heartsuit 6$ $3 \heartsuit 1$
האם השערתה של אלונה נכונה?

ג. נסו למצוא מספר אחד המתאים לכל המקומות הריקים בתרגילים הבאים:

$$\blacksquare \heartsuit 2 = 2 \quad \blacksquare \heartsuit 6 = 6 \quad 3 \heartsuit \blacksquare = 3$$

הגדרה:

מספר שתוצאת הפעולה בינו לבין כל מספר נוסף היא המספר הנוסף, נקרא **איבר ניטרלי** של הפעולה הזאת.

בשלב זה נתייחס לאיברים ניטרליים **רק בפעולות חילופיות**.

מקובל לסמן את האיבר הניטרלי ב- e .

אם נסמן את הפעולה ב- $*$, ואם לפעולה זאת יש איבר ניטרלי, אז מתקיים:

$$a * e = e * a = a \quad \text{לכל } a \text{ בקבוצת המספרים שבה מוגדרת הפעולה הזאת.}$$

ד. האם לפעולה $\heartsuit$ יש איבר ניטרלי?

7. קבעו האם הפעולה $\diamondsuit$ היא בעלת איבר ניטרלי. אם כן, מצאו אותו. אם לא, הסבירו.