الوحدة السّابعة: زُمرات

7.1 عمليات ثنائيّة

الآلة الحاسبة الغريبة

وجد داؤود آلة حاسبة قديمة وغريبة.

رأى على الآلة الحاسبة أزرار أرقام والزّر (=)،

لكنه لم ينجح في تمييز أزرار العمليّات الحسابيّة العاديّة.

نحاول أنْ نجد العمليّات الحسابيّة الّتي تنفِّذها الأزرار المختلفة في الآلة الحاسبة الّتي وجدها داؤود.

جدوا العمليّة

1. أمامكم التّمارين الّتي حلّها داؤود، والنّتائج الّتي حصل عليها.
ما هو - حسب رأيكم - معنى كلّ زر من الأزرار؟

مثال: الزّر ♣

$7 \clubsuit 3 = 20$	$1 \clubsuit 5 = 12$
$2 \clubsuit 7 = 18$	$3 \clubsuit 2 = 10$
$4 \clubsuit 4 = 16$	$8 \clubsuit 4 = 24$

معنى الزّر: $a \clubsuit b = 2 \cdot (a + b)$

أ. الزّر ▲

$2 \blacktriangle 1 = 5$	$3 \blacktriangle 5 = 11$
$11 \blacktriangle 3 = 25$	$4 \blacktriangle 6 = 14$
$20 \blacktriangle 6 = 46$	$7 \blacktriangle 5 = 19$

ب. الزّر ♠

$7 \spadesuit 1 = 4$	$2 \spadesuit 6 = 4$
$4 \spadesuit 1 = 2.5$	$7 \spadesuit 2 = 4.5$
$4 \spadesuit 2 = 3$	$2 \spadesuit 0 = 1$

ت. الزّر ★

$7 \bigstar 1 = 50$	$2 \bigstar 6 = 10$
$4 \bigstar 1 = 17$	$3 \bigstar 3 = 12$
$4 \bigstar 2 = 18$	$5 \bigstar 0 = 25$

ث. الزّر ♦

$2 \blacklozenge 18 = 56$	$2 \blacklozenge 6 = 20$
$20 \blacklozenge 3 = 83$	$3 \blacklozenge 3 = 15$
$2 \blacklozenge 100 = 302$	$5 \blacklozenge 10 = 65$

2. أمامكم تمارين مع عمليّات الأزرار ♦ ★ ♠ ▲ الّتي بحتتموها.
أُكتبوا أعدادًا مناسبة:

أ. الزّر ▲

10 ▲ 3 = ■

11 ▲ ■ = 40

■ ▲ 16 = 76

21 ▲ ■ = 100

ب. الزّر ♠

15 ♠ 47 = ■

■ ♠ 23 = 52.5

10 ♠ ■ = 4

■ ♠ ■ = 5

ت. الزّر ★

4 ★ 5 = ■

−3 ★ −2 = ■

4 ★ ■ = 17

■ ★ 3 = 12

ث. الزّر ♦

1 ♦ 1 = ■

3 ♦ 10 = ■

2 ♦ ■ = 11

■ ♦ ■ = 5

تعريف:
عملية ثنائيّة على أعداد هي عمليّة تتمّ على عددين (ليسا مختلفين بالضّرورة)، وتعطينا عددًا وحيدًا كنتيجة للعمليّة الثنائيّة.
مثال: جميع العمليّات الحسابيّة الّتي تعرَّفنا عليها حتّى الآن هي عمليّات ثنائيّة على الأعداد.
عمليّة إيجاد العدد المضادّ **ليست** عمليّة ثنائيّة؛ لأنّها تعمل على عدد واحد.

خواصّ العمليّات الثّنائيّة

3. حاول داؤود أنْ يحسب في الآلة الحاسبة الغريبة التّمرين 1 ▲ 7 ، أخطأ وبدَّل ترتيب العددين الأول والثّاني في التّمرين.

أ. ما هي النّتيجة (غير الصّحيحة) الّتي حصل عليها داؤود، وما هي النّتيجة الصّحيحة لهذا التّمرين؟

ب. ماذا يحدث إذا كرَّر داؤود الخطأ وبدَّل ترتيب الأعداد في العمليّات الأخرى؟

4. هل العمليات ♦ ★ ♠ ▲ تبادليّة؟ إذا كانت الإجابة بنعم فاشرحوا، أما إذا كانت الإجابة بلا فأعطوا في كل عمليّة غير تبادليّة أمثلة لتمارين يعطينا تغيير ترتيب الأعداد فيها نتائج مختلفة.

5. أ. أعطوا مثالين إضافيّين لعمليّات تبادليّة.
أُكتبوا لكلّ عمليّة كهذه ثلاثة أزواج تمارين ($a*b$ وَ $b*a$) تعبِّر عن صفة التبادليّة.

ب. أعطوا مثالين إضافيّين لعمليّات ليست تبادليّة.
أُكتبوا لكلّ عمليّة كهذه ثلاثة أزواج تمارين ($a*b$ وَ $b*a$) تبيِّن أنّ صفة التبادليّة لا تتحقّق في هذه العمليّات.

6. أ. قال داؤود: "نتيجة عمليّة الجمع العاديّة للعدد 0 وعدد آخر تكون العدد الآخر دائمًا. على ما يبدو أن هذا صحيح مع العملية ♠ ".
سجَّل داؤود التمارين الآتية: 3 ♠ 0 0 ♠ 6 0 ♠ 2
هل فرضيّة داؤود صحيحة؟

ب. قالت أميرة: "نتيجة عمليّة الضّرب العاديّة للعدد 1 بكل عدد آخر تكون العدد الآخر دائمًا. على ما يبدو أن هذا صحيح مع العملية ♠".
سجَّلت أميرة التّمارين الآتية: 3 ♠ 1 1 ♠ 6 1 ♠ 2
هل فرضيّة أميرة صحيحة؟

ت. حاولوا أن تجدوا عددًا واحدًا مناسبًا لجميع الأماكن الفارغة في التمارين الآتية:

3 ♠ ■ = 3 ■ ♠ 6 = 6 ■ ♠ 2 = 2

تعريف:
العدد الّذي تكون نتيجة العمليّة بينه وبين عدد آخر العدد الآخر نفسه - نسمِّيه، في هذه العملية، "عدد محايد".
نتطرّق في هذه المرحلة إلى حدود محايدة **في العمليّات التبادليّة فقط.**
نرمز عادةً للحد المحايد بالحرف **e.**
إذا رمزنا إلى العملية بـ $*$ وإذا كان لهذه العمليّة حد محايد، عندئذٍ يتحقّق $a*e=e*a=a$ لكل **a** في مجموعة الأعداد التي تكون فيها هذه العمليّة معرَّفة.

ث. هل يوجد للعمليّة ♠ حدّ محايد؟

7. حدِّدوا هل يوجد للعمليّة ♦ حدّ محايد؟ إذا كانت الإجابة بنعم فجدوا الحدّ المحايد، أمّا إذا كانت الإجابة بلا فاشرحوا.