

## 9.4 יחס הזהב



- זיהוי חוקיות ותכונות של מספרי פיבונצ'י
- מציאת קשר בין יחס הזהב למנות של מספרים סמוכים בסדרת פיבונצ'י
- מציאת קשר בין יחס הזהב לשברים משולבים



גיליון אלקטרוני (למשל, Excel),



עוברים ביחד עם התלמידים על משימה 1. ממשיכים עד שהיחסים המתקבלים שווים עד דיוק של אלפיות. מגדירים ביחד את יחס הזהב, וקוראים ביחד את המדור "הידעתם?"



הפעילות עוסקת בהכרת יחס הזהב בשני אופנים:

- כמספר שאליו שואפת סדרת המנות של מספרים סמוכים בסדרת פיבונצ'י (זוגות המספרים מוצגים כאורכי צלעות של מלבנים)
- כמספר שאליו שואפת סדרת השברים המשולבים הבאים:

$$1 + \frac{1}{1+1} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}}}$$

בשלב זה זהו קירוב של יחס הזהב.

כמו כן, עוסקת הפעילות בהכרת מלבן הזהב כמלבן שהיחס בין צלעותיו הוא יחס הזהב. במלבן כזה, אם גוזרים ממנו ריבוע שאורך צלעו כאורך הצלעה הקצרה, נותר מלבן הדומה למלבן המקורי. התלמידים משתמשים בידיעותיהם על דמיון מלבנים ובפתרון משוואה ריבועית ומוצאים הצגה מדויקת של יחס הזהב.

1. א.

מידות המלבן	1 x 2	2 x 3	3 x 5	5 x 8	8 x 13	13 x 21	21 x 34
יחס הצלעות	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{3}{2} = 1.5$	$\frac{5}{3} = 1.666$	$\frac{8}{5} = 1.6$	$\frac{13}{8} = 1.625$	$\frac{21}{13} = 1.615$	$\frac{34}{21} = 1.619$

- ב. אם נמקם את יחסי אורכי הצלעות על ציר מספרים נראה כי היחסים הולכים ומתקרבים משני הצדדים לנקודה המייצגת מספר מסוים שהוא בין 1.615 לבין 1.619.
- ג. המשמעות ההנדסית של התופעה היא: ככל שמתקדמים בסדרה, היחסים בין צלעותיהם כמעט שווים, ולכן המלבנים "כמעט דומים" זה לזה.

2. א. חשוב להתייחס לכך שכל חישוב מתבסס על הקודם לו, ואין צורך לחשב מהתחלה כל תרגיל.

$$1 + \frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3} = 1.666$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{13}{8} = 1.625$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{13}{8}} = \frac{21}{13} = 1.619$$

- ב. קיבלנו אותן תוצאות כמו אלה שבטבלה שבמשימה 1.

אם נניח כי ערכו של שבר במקום מסוים הוא  $\frac{a}{b}$  (כאשר a ו-b מייצגים מספרי פיבונצ'י סמוכים ו-a הוא

הגדול מבין השניים), אז ערכו של השבר הבא הוא  $1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a}$

כלומר, מתקבלת תוצאה שהיא היחס בין מספרי פיבונצ'י סמוכים a ו-a + b, כאשר הפעם a הוא המספר הקטן מבין השניים.

3. א-ד. רושמים את הנוסחאות הבאות בטבלה בגיליון Excel

	A	B	C
1	סדרת פיבונצ'י	יחס בין מספרי פיבונצ'י סמוכים	שברים משולבים
2	2	2	2
3	3	1.5	1.5
4	=A2+A3	=A4/A3	=1+1/C3

אם גוררים את התבניות מתקבלת הטבלה הבאה.

	A	B	C
1	סדרת פיבונצ'י	יחס בין מספרי פיבונצ'י סמוכים	שברים משולבים
2	2	2	2
3	3	1.5	1.5
4	5	1.66667	1.66667
5	8	1.60000	1.60000
6	13	1.62500	1.62500
7	21	1.61538	1.61538
8	34	1.61905	1.61905
9	55	1.61765	1.61765
10	89	1.61818	1.61818
11	144	1.61798	1.61798
12	233	1.61806	1.61806
13	377	1.61803	1.61803
14	610	1.61804	1.61804
15	987	1.61803	1.61803
16	1597	1.61803	1.61803

אפשר לראות כי היחסים בין מספרי פיבונצ'י סמוכים (עמודה B) שווים לערכי השברים המשולבים (עמודה C). כדאי לשים לב לכך שהיחסים מתקרבים ("מתכנסים") אל יחס הזהב (ערך אחד מעליו והערך הבא מתחתיו). אם הספרה שבמקום המתאים לרמת הדיוק הרצוי מתקבעת (כלומר, מפסיקה להשתנות), אפשר לדעת כי אמנם הגענו לרמת הדיוק הרצוי.

4. א. אם נסתכל על מספרי פיבונצ'י במקומות 9, 8, 7 (34, 21, 13) ונחשב את היחסים  $\frac{21}{13}$  ו-  $\frac{34}{21}$  נראה

כי יחסים אלה שווים עד למאיות (וקרובים ליחס הזהב).

**הסבר:** 34 ו-13 נמצאים במקומות אי-זוגיים בסדרת פיבונצ'י לכן כפי שראינו בפעילות קודמת

$$34 \cdot 13 = 21^2 + 1$$

$$34 \cdot 13 \approx 21^2 \quad \text{כלומר,}$$

$$\frac{34}{21} \approx \frac{21}{13} \quad \text{ולכן,}$$

ב. ככל שנתקדם בסדרה המספרים ילכו ויגדלו ותוספת או גרעון של 1 יהיו פחות משמעותיים. לכן היחסים יתקרבו זה לזה יותר ויותר.

**5.** התשובות ישתנו לפי הדוגמאות של התלמידים.

לפני חישוב יחסי הצלעות מבקשים מהתלמידים לשער באיזה מהמלבנים ששרטטו המלבן הנחתך "דומה ביותר" למלבן שממנו נחתך. החישוב יהווה בדיקה של השערתם.

**6.** כדאי לחזור אל הספירלה ששרטטנו בפעילות קודמת ולהראות כי אורכי המלבנים המרכיבים את השרטוט הם

מספרי פיבונצ'י סמוכים, והם מורכבים מריבוע וממלבן שגם אורכי צלעותיו הם מספרי פיבונצ'י סמוכים קודמים.

א. כדי שהמלבן יהיה מלבן הזהב צריך להתקיים:  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$

$$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

ב. אם נסמן  $\frac{a}{b} = \varphi$  נקבל  $\frac{b}{a} = \frac{1}{\varphi}$  ולכן,  $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ג. פתרון המשוואה הריבועית הוא

יחס הזהב הוא הפתרון החיובי

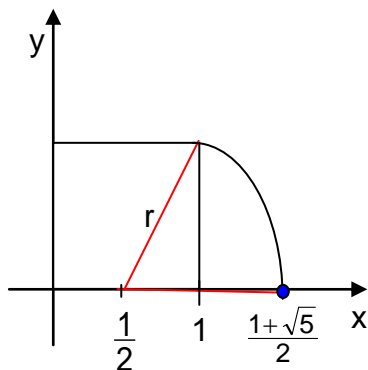
**7.** לפי משפט פיתגורס

$$r^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$r = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

הקשת פוגשת את ציר ה-x בנקודה:

$$x = \frac{1}{2} + r = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$





## שומרים על כושר

1. א.

$\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{70}$	$\frac{2}{7}$
$-\frac{1}{70}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{29}{70}$
$\frac{4}{35}$	$\frac{41}{70}$	$-\frac{1}{10}$

ב.

$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{18}$
$1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$-\frac{11}{18}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{5}{2} \quad \text{א. 2.}$$

$$\frac{2}{5-2} = 2 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{12}{7} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{25}{4} \quad \text{ב.}$$



התלמידים קרוב לודאי אינם מכירים את הסימון n!. לכן נוסף הרמז בספר לתלמיד. זוהי ההזדמנות להכיר להם את הסימון ולהתייחס לגידול התוצאות ככל ש-n גדל.

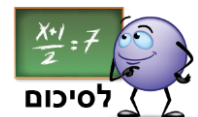
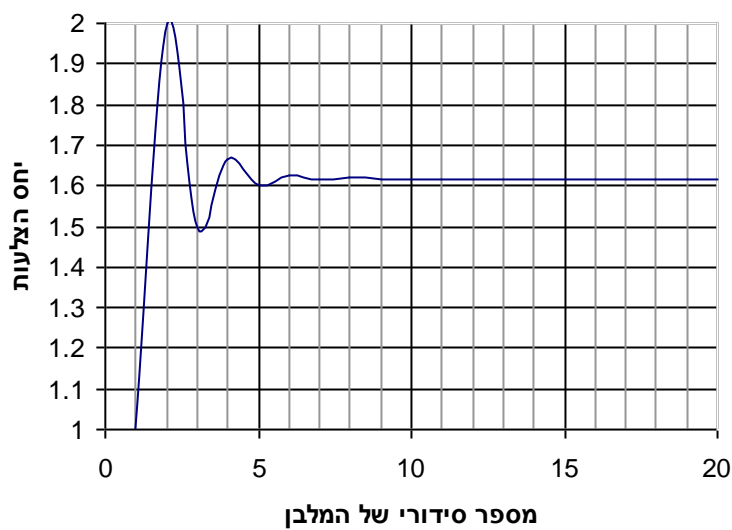
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{4!} - 4}{4}$$



1. לסדרת המלבנים שאורך צלעותיהם הם מספרי פיבונצ'י סמוכים יש תכונה מיוחדת: היחס בין אורכי הצלעות מתקרב למספר מסוים הנקרא יחס הזהב.

משרטטים את הגרף הקשר בין המספר הסידורי של המלבן לבין היחס הנ"ל. כיצד לדעתכם מתבטאת התכונה שלעיל בגרף? שרטטו בגיליון אלקטרוני את הגרף ובדקו את השערתכם. **תשובה:** הגרף עולה ויורד אבל מתכנס אל יחס הזהב.

היחס בין הצלעות



- מתייחסים לתחומים הרבים (מתמטיים ואחרים) הקשורים אל יחס הזהב. תחומים במתמטיקה – למשל, דמיון, משוואה ריבועית ושאיפה לגבול.
- מציגים דוגמאות מן המציאות הקשורות ליחס הזהב ולמלבן הזהב – למשל, בארכיאולוגיה ובאמנות, ומבקשים מן התלמידים לחפש באינטרנט דוגמאות נוספות.