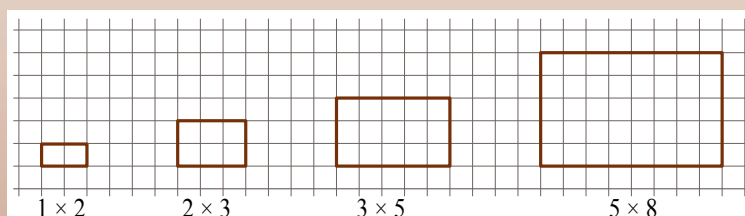


9.4 יחס הזהב



בפעילות הקודמת שרטטתם מלבנים שאורך צלעותיהם הם מספרים סמוכים בסדרת פיבונצ'י.

למשל:



נחקור את היחס בין הצלעות של מלבנים כאלה, ונכיר את יחס הזהב.

יחס הזהב

- א. מצאו את היחס בין אורך הצלע הארוכה לאורך הצלע הקצרה של כל אחד מהמלבנים שמידותיהם רשומות בטבלה.

מידות המלבן	1×2	2×3	3×5	5×8	8×13	13×21	21×34
יחס הצלעות	$\frac{2}{1} = 2$						

- ב. מה תוכלו לומר על היחסים שנוצרו?

- ג. מהי המשמעות הגאומטרית של התופעה שמצאתם?

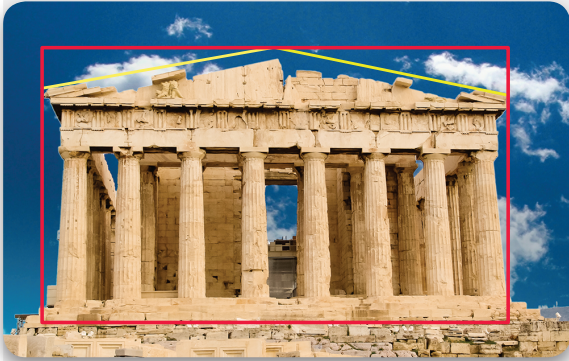
ככל שמתקדמים בסדרת המלבנים שאורכי צלעותיהם הם שני מספרי פיבונצ'י סמוכים, היחס בין אורכי הצלעות מתקרב למספר $1.6180339\dots$, הנקרא **יחס הזהב**.

- לפניכם סדרה של שברים משולבים, הרשומה משמאל לימין.

$$1 + \frac{1}{1+1} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}}$$

- א. הפכו לשברים פשוטים ועשרוניים. התחילו משמאל (שימו לב לחוקיות).

- ב. השוו בין התוצאות שקיבלתם כאן ואלה שבטבלה במשימה 1.



יחס הזהב הוא מספר שהיה ידוע למתמטיקאים זה זמן רב. זהו מספר אי-רציונלי המסומן באות היוונית ϕ (פִּי). לפי ההשערות מי שגילה אותו היה אחד מתלמידידיו של פיתגורס. מלבן הזהב הוא מלבן שבו אורכי צלעותיו מקיימים את יחס הזהב. ליחס הזהב ולמלבן הזהב יש קשרים רבים לחי, לצומח, לאמנות ולארכיטקטורה. כך למשל, החזית של מבנה הפֶּרְתֵּנוֹן שנבנה ביוון העתיקה לפני כ-2500 שנה, תוכננה כך שמידותיה יקיימו את יחס הזהב (ראו תמונה).

יחד עם זאת, כדאי לציין כי יש הטוענים כי ההערה ליחס הזהב מוגזמת. הם טוענים כי הסיבה ל-"פולחן" זה נעוצה בקיום מספר רב של יחסים הקרובים ליחס הזהב, ולכן חוסר הדיוק במדידות (אפילו הקטן ביותר) עלול להוביל למסקנה כי יחסים אלה מבטאים את יחס הזהב. חפשו באינטרנט דוגמאות ליחס הזהב ולמלבן הזהב.



3. א. הכינו גליון אלקטרוני כדוגמת הגליון הבא.

	A	B	C
1	סדרת פיבונצ'י	יחס בין מספרי פיבונצ'י סמוכים	שברים משולבים
2	2	2	2
3	3	1.5	1.5
4			

ב. רשמו בתא A4 נוסחה ליצירת סדרת פיבונצ'י החל מ-2 וגררו.

ג. רשמו בתא B4 נוסחה ליחס בין מספרי פיבונצ'י סמוכים וגררו.

ד. רשמו בתא C4 נוסחה המתבססת על התא הקודם ליצירת השברים המשולבים וגררו. מה קיבלתם?

4. במשימות הקודמות ראינו כי

- היחסים $\frac{21}{13}$ ו- $\frac{34}{21}$ שווים עד למאיות (וקרובים ליחס הזהב).

בפעילות הקודמת ראינו כי

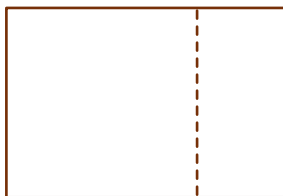
- מכפלת שני מספרים הנמצאים במקומות זוגיים עוקבים בסדרת פיבונצ'י או שני מספרים הנמצאים במקומות אי-זוגיים עוקבים, נבדלת ב- 1 מריבוע המספר שנמצא ביניהם.

א. הסבירו כיצד שתי התכונות האלה קשורות זו בזו.

ב. הסבירו מדוע ככל שנתקדם בסדרה נקבל יחסים קרובים יותר זה לזה.

מלבן הזהב

5. שרטטו במחברת ארבעה מלבנים שונים.



העבירו בכל מלבן קטע מקביל לצלע הקצרה שיחתוך ממנו ריבוע ומלבן נוסף.

באיזה מהמלבנים הנוספים היחס בין הצלעות הוא הקרוב ביותר ליחס בין צלעות המלבן המקורי.

מלבן הזהב הוא מלבן המקיים את התכונה הבאה:

אם גוזרים ממנו ריבוע שאורך צלעו כאורך הצלע הקצרה, מתקבל מלבן דומה למלבן המקורי. מלבן הזהב נקרא כך כי היחס בין אורכי צלעותיו הוא יחס הזהב.

6. נתון מלבן שחתכו ממנו ריבוע (ראו שרטוט).

א. מה צריך להתקיים כדי שהמלבן יהיה מלבן הזהב?

הדרכה: רשמו במונה את אורך הצלע הגדולה.

ב. סמנו ב- φ את יחס הזהב: $\frac{a}{b} = \varphi$.

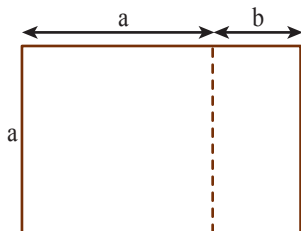
הראו כי הפרופורציה שרשמתם בסעיף א שקולה

למשוואה הריבועית $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

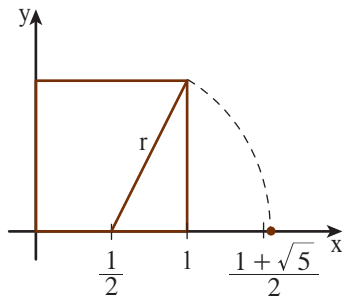
רמז: $\frac{b}{a} = \frac{1}{\varphi}$

ג. פתרו את המשוואה עבור φ .

הפתרון החיובי הוא יחס הזהב.



7. במערכת הצירים שלפניכם:



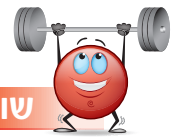
- שירטטו ריבוע יחידה.

- העבירו קטע בין הנקודות $(\frac{1}{2}, 0)$ ו- $(1, 1)$, וסימנו את הקטע ב- r .

- שירטטו קשת של מעגל שמרכזו ב- $(\frac{1}{2}, 0)$ ורדיוסו r .

שיעור ה- x של נקודת המפגש של הקשת עם ציר ה- x הוא יחס הזהב.

הסבירו מדוע.



שומרים על כושר

1. בכל ריבוע קסם שלפניכם שווה סכום המספרים בכל שורה, בכל טור ובשני האלכסונים.

השלימו את ריבועי הקסם ללא מחשבון.

ב.

$-\frac{1}{18}$		
$1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	
		$\frac{1}{2}$

א.

$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{7}$
	$\frac{1}{5}$	
		$-\frac{1}{10}$

2. הביעו בעזרת קו שבר אחד.

ה. $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{6}$

ג. $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{4}$

א. $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{15}$

ו. $\frac{2}{5} - 2 = \frac{\quad}{6}$

ד. $\frac{2}{3} + 2 = \frac{\quad}{4}$

ב. $\frac{2}{3} + 1 = \frac{\quad}{15}$



יחס הזהב הוא: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ כתבו יחס זה באמצעות 4 ספרות של 4 ופעולות חשבון.

רמז: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

$\sqrt{4} = 2$