9.2 סכומים

מטרות

- זיהוי חוקיות ותכונות של סכומים בסדרת פיבונצ'י ושימוש בהם
- מציאת קשר בין סכומים של מספרים בסדרת פיבונצ'י למספרים בסדרה.

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (למשל, *Excel*),

פתיחה

מזכירים את **החוקיות** של המספרים בסדרת פיבונצ'י (כל איבר מלבד השניים הראשונים הוא סכום של השניים הקודמים לו), ומבצעים את הפעילות שבפתיח. בהמשך מציגים את סדרת פיבונצ'י, ומתייחסים לסימונים של איברי הסדרה. מבררים את ההבדל בין מקום האיבר בסדרה לבין ערכו – כמו למשל, a_{4-1} לעומת $a_4 - 1$

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת במציאת הקשר בין סכומים של מספרים מסוימים בסדרת מספרי פיבונצ'י לבין אחד המספרים בסדרה. במהלך הפעילות התלמידים יגלו כי:

עבור n אי-זוגי $a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_n = a_{n+1}$

עבור n זוגי $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_n = a_{n+1} - 1$

עבור n כלשהו $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_{n+2} - 1$

1. א.

$a_4 = 3$	$a_3 = 2$	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$
$a_6 + 2 = 10$	$a_6 + a_2 = 9$	$a_{6+2} = 21$	$a_6 = 8$

ב. a_{6+2} הוא המספר שעומד במקום 2 + 6 כלומר במקום השמיני בסדרה.

$a_6 + 2$ הוא הסכום של המספר העומד במקום השישי ושל המספר 2.

ג. למשל, 16 = 5 – 21. בכתיב אלגברי $a_8 - a_5 = 16$

2. א.
$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 \\ a_3 &= a_4 - a_2 \\ a_3 &= a_5 - a_4 \\ \hline 3a_3 &= a_1 + a_5 \end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 \\ a_5 &= a_6 - a_4 \\ a_5 &= a_7 - a_6 \\ \hline 3a_5 &= a_3 + a_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_{19} + a_{18} \\ a_{20} &= a_{21} - a_{19} \\ a_{20} &= a_{22} - a_{21} \\ \hline 3a_{20} &= a_{18} + a_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{100} &= a_{99} + a_{98} \\ a_{100} &= a_{101} - a_{99} \\ a_{100} &= a_{102} - a_{101} \\ \hline 3a_{100} &= a_{98} + a_{102} \end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_n &= a_{n+1} - a_{n-1} \\ a_n &= a_{n+2} - a_{n+1} \\ \hline 3a_n &= a_{n-2} + a_{n+2} \end{aligned}$$

ד. עבור כל מספר פיבונצ'י, סכום של שני המספרים הסמוכים למספרים שלידו (משני צדדיו) גדול פי 3 מן המספר הנתון.

3. המספרים הם: 144 , 89 , 55 , 34 , 21 , 13 , 8 , 5 , 3 , 2 , 1 , 1

4. א.

כתיב אלגברי		שפת מספרים	כתיב אלגברי
$= a_4$	$= 3$	$1 + 2$	$a_1 + a_3$
$= a_6$	$= 8$	$1 + 2 + 5$	$a_1 + a_3 + a_5$
$= a_8$	$= 21$	$1 + 2 + 5 + 13$	$a_1 + a_3 + a_5 + a_7$
$= a_{10}$	$= 55$	$1 + 2 + 5 + 13 + 34$	$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$

ב. כדי לקבל a_{22} יש לחבר 11 איברים במקומות אי-זוגיים עוקבים (החל מן המקום הראשון) בסדרת פיבונצ'י.
אם מחברים איברים במקומות אי-זוגיים עוקבים (החל מן המקום הראשון) בסדרת פיבונצ'י מתקבל תמיד מספר שנמצא במקום זוגי. לכן אי-אפשר לקבל a_{25} בדרך זו.

ג. עבור n אי-זוגי כלשהו: $\underbrace{a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n}_{\frac{n+1}{2}\text{ מספרים}} = a_{n+1}$.

ד. הסכום של $\frac{n+1}{2}$ מספרי פיבונצ'י במקומות אי-זוגיים עוקבים, החל מ- 1 ועד a_n, שווה למספר הנמצא במקום ה- (n + 1).

ה. $a_8 = a_7 + a_6 = a_7 + (a_5 + a_4) = a_7 + a_5 + (a_3 + a_2) = a_7 + a_5 + a_3 + a_1$

5. א.

כתיב אלגברי	שפת מספרי		כתיב אלגברי
$a_2 + a_4$	1 + 3	= 4	$= a_5 - 1$
$a_2 + a_4 + a_6$	1 + 3 + 8	= 12	$= a_7 - 1$
$a_2 + a_4 + a_6 + a_8$	1 + 3 + 8 + 21	= 33	$= a_9 - 1$
$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{22}$	....		$= a_{23} - 1$
$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_n$	....		$= a_{n+1} - 1$

ב. הסכום של $\frac{n}{2}$ מספרי פיבונצ'י במקומות זוגיים עוקבים, החל מהמקום השני ועד המקום ה- n (n מספר זוגי), קטן ב- 1 מהמספר הנמצא במקום ה- (n + 1).

6. א.

כתיב אלגברי	שפת מספרים		כתיב אלגברי
$a_1 + a_2$	1 + 1	= 2	$= a_4 - 1$
$a_1 + a_2 + a_3$	1 + 1 + 2	= 4	$= a_5 - 1$
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	1 + 1 + 2 + 3	= 7	$= a_6 - 1$
$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{20}$	....		$= a_{22} - 1$
$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{21}$	....		$= a_{23} - 1$
$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$	....		$= a_{n+2} - 1$

ב. הסכום של n מספרי פיבונצ'י במקומות עוקבים, החל מ- 1 ועד a_n, קטן ב- 1 מהמספר הנמצא במקום ה- (n + 2).

7. כדי לבדוק משימה 6 נמלא טבלה בגיליון אלקטרוני כדוגמת הטבלה הבאה.

	A	B
1	סדרת פיבונצ'י	סדרת הסכומים
2	1	1
3	1	2
4	=A2+A3	=B3+A4

אם נגרור את התבניות נקבל את הטבלה שבעמוד הבא.

	A	B
1	סדרת פיבונצ'י	סדרת הסכומים
2	1	1
3	1	2
4	2	4
5	3	7
6	5	12
7	8	20
8	13	33
9	21	54
10	34	88
11	55	143
12	89	232
13	144	376
14	233	609
15	377	986
16	610	1596
17	987	2583
18	1597	4180
19	2584	6764
20	4181	10945

אפשר לראות בטבלה שכל סכום שבעמודה B קטן ב- 1 ממספר פיבונצ'י שבעמודה A הנמצא שתי שורות אחרי השורה של הסכום הנ"ל.

8. נבחר למשל את ארבעת המספרים הראשונים: 1, 1, 2, 3

מכפלת האיבר הראשון ברביעי: 3

מכפלת האיבר השני בשלישי, כפול שתיים 4

סכום הריבועים של האיבר השני והשלישי 5

וזוהי השלשה הפיתגורית 3, 4, 5.

כמו כן, ארבעת המספרים החל מהמספר השני (1, 2, 3, 5) יתנו את השלשה הפיתגורית 13 , 12 , 5

ארבעת המספרים החל מהמספר הרביעי (3, 5, 8, 13) יתנו את השלשה הפיתגורית 89 , 80 , 39

אפשר לבנות ולאשר דוגמאות נוספות באמצעות גיליון אלקטרוני.

שומרים על כושר

1. א. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots - 100 = (-1) \cdot 50 = -50$

$2 - 4 + 6 - 8 + 10 - \ldots - 100 = (-2) \cdot 25 = -50$

ב. $(2 + 4 + 6 + \ldots + 100) - (1 + 3 + 5 + \ldots + 99) =$

$(2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \ldots + (100 - 99) = 50$

2. א. $(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})\cdot\ \dots\ \cdot(1-\frac{1}{99})\cdot(1-\frac{1}{100})=$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$$

כל המונים והמכנים מצטמצמים פרט למונה הראשון והמכנה האחרון.

$$(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{4})\cdot\ \dots\ \cdot(1+\frac{1}{99})\cdot(1+\frac{1}{100})=$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\dots\frac{100}{99}\cdot\frac{101}{100}=\frac{101}{2}=50\frac{1}{2}$$

ב. $(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})\cdot\ \dots\ \cdot(1-\frac{1}{n})=0.02$

לפי סעיף א $\frac{1}{n}=0.02$ לכן $n = 50$

$$(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{4})\cdot\ \dots\ \cdot(1+\frac{1}{n})=200$$

לפי סעיף א $\frac{n+1}{2}=200$ כלומר $n + 1 = 400$ לכן $n = 399$

הסבר לחידה נמצא במדריך למורים של הפעילות הבאה – 9.3 קסמים.

למסיימים

1. התבוננו בתרגילים במדור "שומרים על כושר", וזהו את המאפיין המשותף לכולם. חברו תרגילים נוספים בעלי אותו מאפיין.

תשובה

המאפיין את התרגילים במדור "שומרים על כושר" הוא היכולת "לכווץ" ביטוי מספרי רב מחוברים או רב גורמים לפעולה אחת.

אפשר למצוא דוגמאות רבות לתרגילים כאלה.

לסיכום

- מכלילים בכתיב אלגברי את הקשרים עבור הסכומים של מספרי פיבונצ'י סמוכים במקומות זוגיים, אי-זוגיים ובסדרה השלמה.
- כהסבר לשלושת המשפטים האלה (משימות 4, 5 ו- 6) מציגים את הסכומים כשלושה טורים טלסקופיים, ומדגימים בעזרתם את הקשרים שנמצאו בפעילות זו.

סכום כל המספרים

$a_1 = \cancel{a_3} - a_2$

$a_2 = \cancel{a_4} - \cancel{a_3}$

$a_3 = \cancel{a_5} - \cancel{a_4}$

$a_4 = \cancel{a_6} - \cancel{a_5}$

$a_5 = \cancel{a_7} - \cancel{a_6}$

$a_6 = \cancel{a_8} - \cancel{a_7}$

$a_7 = a_9 - a_8$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = a_9 - 1$

סכום המספרים במקומות הזוגיים

$a_2 = a_1$

$a_4 = \cancel{a_5} - a_3$

$a_6 = \cancel{a_7} - \cancel{a_5}$

$a_8 = \cancel{a_9} - \cancel{a_7}$

$a_{10} = \cancel{a_{11}} - \cancel{a_9}$

$a_{12} = \cancel{a_{13}} - \cancel{a_{11}}$

$a_{14} = a_{15} - a_{13}$

$a_2 + a_4 + \ldots + a_{14} = a_{15} - 1$

סכום המספרים במקומות האי-זוגיים

$a_1 = \cancel{a_2}$

$a_3 = \cancel{a_4} - \cancel{a_2}$

$a_5 = \cancel{a_6} - \cancel{a_4}$

$a_7 = \cancel{a_8} - \cancel{a_6}$

$a_9 = \cancel{a_{10}} - \cancel{a_8}$

$a_{11} = \cancel{a_{12}} - \cancel{a_{10}}$

$a_{13} = a_{14} - a_{12}$

$a_1 + a_3 + \ldots + a_{13} = a_{14}$

החיבור לפי אגפים גורם להתכנסות וביטול איברים בדומה להתקצרות של טלסקופ על-ידי התכנסות הטבעות המרכיבות אותו אחת בתוך השנייה.