יחידה 9: מספרי פיבונצ'י

9.1 לארנבות באהבה

מטרות

- הצגת סדרת מספרי פיבונצ'י באמצעות בעייה מן המציאות
- זיהוי חוקיות ותכונות בסדרת מספרים ושימוש בהם כדי למצוא מספרים נוספים בסדרה
- פתרון משוואות במספרים ועם פרמטרים.
- חישובים בשברים

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (למשל *Excel*),

פתיחה

מספרים תחילה מעט על הרקע ההיסטורי של פיבונצ'י (ראו במדור "הידעתם?"). בהמשך מציגים את "הבעיה של פיבונצ'י" (בעיית הארנבות) בפני הכיתה, ויחד עם התלמידים בודקים את השורות הראשונות המלאות של הטבלה. כדאי להדגיש כי תום שנה אחת הוא תחילת החודש ה- 13.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת בסדרת מספרי פיבונצ'י. בתחילה מוצאים את המספרים הראשונים בסדרה תוך עיסוק בבעיית הארנבות. במהלך הפעילות מוצאים את החוקיות העיקרית של הסדרה: כל מספר בסדרה פרט לשני המספרים הראשונים הוא סכום של שני המספרים הקודמים לו. מוצאים גם תכונות נוספות של הסדרה (ראו משימה 2ב).

בשלב הבא, מוצאים, על-פי חוקיות הסדרה ותכונותיה, מספרים נוספים על-סמך מספרים קודמים להם או הבאים אחריהם. בשלב האחרון מתייחסים לסדרות מספרים שיש להן אותה חוקיות כמו של סדרת פיבונצ'י אבל שני המספרים הראשונים שלהן שונים מ- 1. התייחסות כזו מאפשרת לנצל את הסדרות לפתרון משוואות במספרים ועם פרמטרים.

1. לאחר שנה יהיו 233 זוגות ארנבות.

מספר כל הזוגות	זוגות בוגרים (בני חודשיים או יותר)	זוגות בני חודש	זוגות נולדים	תחילת החודש ה-
1	0	0	1	1
1	0	1	0	2
2	1	0	1	3
3	1	1	1	4
5	2	1	2	5
8	3	2	3	6
13	5	3	5	7
21	8	5	8	8
34	13	8	13	9
55	21	13	21	10
89	34	21	34	11
144	55	34	55	12
233	89	55	89	13

2. א. עשרת המספרים הראשונים בסדרת מספרי פיבונצ'י הם:

1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55

ב. למשל,

- סכום שני מספרים סמוכים בסדרה מהווה את המספר הבא.
- סדרת ההפרשים של זוגות מספרים סמוכים בסדרה מהווה גם היא סדרת מספרי פיבונצ'י.
- כל מספר שלישי בסדרה הוא זוגי.

ג. למשל, סדרת מספרי פיבונצ'י היא סדרה שבה שני המספרים הראשונים הם 1, וכל מספר נוסף הוא סכום של השניים הקודמים לו.

ד. בין 20 המספרים הראשונים יש יותר מספרים אי-זוגיים. מכיוון שכל מספר בסדרה פרט לשניים הראשונים הוא סכום שני הקודמים לו, ומכיוון ששני המספרים הראשונים אי-זוגיים ניתן להסיק כי רק כל מספר שלישי הוא זוגי. כל יתר המספרים הינם סכומים של זוגות מספרים שבהם אחד זוגי והאחר אי-זוגי.

ה. כל מספר שלישי בסדרה בלבד הוא זוגי.לכן המספר השלושים בסדרה הוא זוגי, המספר ה- 100 הוא אי-זוגי, והמספר המאתיים גם הוא אי-זוגי.

.3

תחילת החודש ה-	זוגות נולדים	זוגות בני חודש	זוגות בוגרים (בני חודשיים או יותר)	מספר כל הזוגות
25				*75,025*
26				*121,393*
27				*196,418*
28	*121,393*	*75,025*	*121,393*	317,811
29	*196,418*	*121,393*	*196,418*	514,229
30	*317,811*	*196,418*	*317,811*	*832,040*
31	514,229	*317,811*	514,229	*1,346,269*

.4

	A	B	C	D	E
1	תחילת החודש ה-	זוגות נולדים	זוגות בני חודש	זוגות בוגרים (בני חודשיים או יותר)	מספר כל הזוגות
2	1	1	0	0	1
3	2	0	1	0	1
4	3	1	0	1	2
5	4	1	1	1	3
6	5	2	1	2	5
7	6	3	2	3	8
8	7	5	3	5	13
9	8	8	5	8	21
10	9	13	8	13	34
11	10	21	13	21	55
12	11	34	21	34	89
13	12	55	34	55	144
14	13	89	55	89	233
15	14	144	89	144	377
16	15	233	144	233	610
17	16	377	233	377	987
18	17	610	377	610	1597
19	18	987	610	987	2584
20	19	1597	987	1597	4181
21	20	2584	1597	2584	6765
22	21	4181	2584	4181	10946
23	22	6765	4181	6765	17711
24	23	10946	6765	10946	28657
25	24	17711	10946	17711	46368
26	25	28657	17711	28657	75025
27	26	46368	28657	46368	121393
28	27	75025	46368	75025	196418
29	28	121393	75025	121393	317811
30	29	196418	121393	196418	514229
31	30	317811	196418	317811	832040
32	31	514229	317811	514229	1346269

5. ניתן להשלים את הטבלה על-פי החוקיות או על-פי הסיפור.

מספר כל הזוגות	זוגות בוגרים (בני חודשיים או יותר)	זוגות בני חודש	זוגות נולדים
$a + b$	a	$b – a$	a
$a + 2b$	b	a	b
$2a + 3b$	$a + b$	b	$a + b$

6. ניתן להשלים את הטבלה על-פי החוקיות של סדרת פיבונצ'י, ובמקרים שניתנים מספרים שאינם סמוכים, באמצעות משוואות.

א. $3 \;,\; -4 \;,\; -1 \;,\; -5 \;,\; -6 \;,\; -11$

ב. $0 \;,\; \frac{1}{4} \;,\; \frac{1}{4} \;,\; \frac{1}{2} \;,\; \frac{3}{4} \;,\; 1\frac{1}{4}$

ג. $3\frac{1}{4} \;,\; -2\frac{3}{4} \;,\; \frac{1}{2} \;,\; -2\frac{1}{4} \;,\; -1\frac{3}{4} \;,\; -4$

ד. $-9 \;,\; 2 \;,\; -7 \;,\; -5 \;,\; -12 \;,\; -17$

ה. $-2\frac{1}{3} \;,\; 2 \;,\; -\frac{1}{3} \;,\; 1\frac{2}{3} \;,\; 1\frac{1}{3} \;,\; 3$

7. ניתן להשלים את הטבלה על-פי החוקיות של סדרת פיבונצ'י,

א. $d - 2m \;,\; 2m \;,\; d \;,\; 2m + d \;,\; 2m + 2d \;,\; 4m + 3d$

ב. $a \;,\; b - 0.5a \;,\; 0.5a + b \;,\; 2b \;,\; 0.5a + 3b \;,\; 0.5a + 5b$

ג. $\frac{y-3x}{2} \;,\; x \;,\; \frac{y-x}{2} \;,\; \frac{y+x}{2} \;,\; y \;,\; \frac{3y+x}{2}$

ד. $c \;,\; d \;,\; c + d \;,\; c + 2d \;,\; 2c + 3d \;,\; 3c + 5d$

ה. $\frac{a}{b} \;,\; \frac{b}{a} \;,\; \frac{a^2+b^2}{ab} \;,\; \frac{a^2+2b^2}{ab} \;,\; \frac{2a^2+3b^2}{ab} \;,\; \frac{3a^2+5b^2}{ab}$ $\quad a \neq 0$, $b \neq 0$

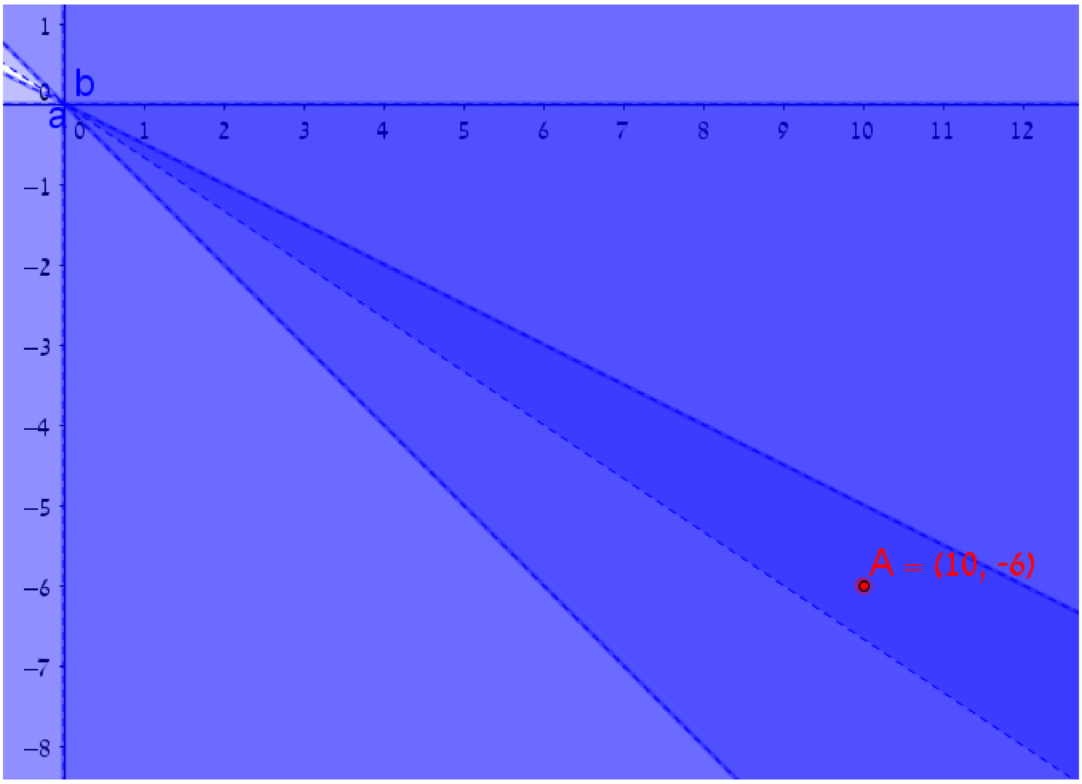
ו. $\frac{-x-3}{x^2-1} \;,\; \frac{1}{x-1} \;,\; \frac{-2}{x^2-1} \;,\; \frac{1}{x+1} \;,\; \frac{x-3}{x^2-1} \;,\; \frac{2x-4}{x^2-1}$ $\quad x \neq \pm 1$

8. אפשר לפתור את השאלה על-ידי ניסוי וטעיה, ואפשר גם בדרך שיטתית. למשל בדרך גרפית.

נסמן את שני איברי הסדרה הראשונים ב- x וב- y. נניח ש $x > 0$, אז $y < 0$, $x + y > 0$, $x + 2y < 0$ וכן הלאה, תלוי באורך הסדרה שרוצים לייצר.

עתה אפשר לשרטט את האי-שוויונות ולמצוא את התחום המשותף להם, לבחור נקודה בתחום המשותף ששיעוריה x , y הם המספרים הראשונים בסדרה. ראו בעמוד הבא.

בשרטוט התייחסנו אל חמשת האיברים הראשונים בסדרה. בחרנו את הנקודה (6– , 10) מן התחום המשותף.



הסדרה היא: ... , 0 , 2 , 2– , 4 , 6– , 10

ואמנם חמשת האיברים הראשונים בסדרה סימניהם מתחלפים

שומרים על כושר

1. דרך I

א. $6\frac{3}{4}\cdot 5\frac{1}{3}=\frac{27}{4}\cdot\frac{16}{3}=\frac{27\cdot 16}{4\cdot 3}=9\cdot 4=36$

ב. - הפכו כל מספר מעורב לשבר

- כפלו מונה במונה ומכנה במכנה (צמצמו לפני כן,אם אפשר)

ג. הפיכת מספר מעורב לשבר מסתמכת על הרחבת שברים ועל חיבור שברים בעלי אותו מכנה.

דרך II

א. $6\cdot 5\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot 5\frac{1}{3}=32+\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{3}=32+4=36$

ב. - כפלו אחד המספרים בחלק השלם של השבר האחר ובחלק השבור שלו וחברו את המכפלות.

ג. הדרך מסתמכת על חוק הפילוג.

דרך III

א. $6\cdot5+6\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot5+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=30+2+\frac{15}{4}+\frac{1}{4}=36$

ב. - פרקו כל מספר מעורב לחלקו השלם וחלקו השבור

- כפלו כל חלק של מספר אחד בכל חלק של המספר האחר וחברו את כל המכפלות.

ג. הדרך מסתמכת על חוק הפילוג המורחב.

2. דרך I

א. $a\neq\pm1\ \ (a-1)(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a+1}{a^2-1})=(a-1)(\frac{a+1}{a-1}-\frac{1}{a-1})=(a-1)(\frac{a}{a-1})=a$

ב - צמצמו כל שבר שתוכלו

- חברו את השברים שבתוך הסוגריים

- כפלו

ג. הפעולות בסוגריים קודמות.

דרך II

א. $a\neq\pm1\quad (a-1)(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a+1}{a^2-1})=\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}-\frac{(a-1)(a+1)}{a^2-1}=a+1-1=a$

ב. - כפלו כל מחובר שבתוך הסוגריים בביטוי שמחוץ לסוגריים

- צמצמו וחברו

ג. חוק הפילוג.

נפתור את החידה בשלבים.

אם ישנה רק מדרגה אחת יש לרותי רק אפשרות אחת לטפס.

אם ישנן 2 מדרגות יש לרותי 2 אפשרויות: היא יכולה לטפס אותן אחת אחת, או שתיים יחד.

אם ישנן 3 מדרגות יש לרותי 3 אפשרויות: כל פעם אחת, או אחת ואז שתיים יחד, או שתיים יחד ואז אחת.

אם ישנן 4 מדרגות, יש לרותי 5 אפשרויות. אל המדרגה הרביעית רותי יכולה להגיע בשתי דרכים: לעלות מדרגה אחת מהמדרגה השלישית, או לדלג שתי מדרגות מן המדרגה השנייה. כלומר מספר האפשרויות לעלות 4 מדרגות שווה לסכום מספר האפשרויות לעלות 3 מדרגות עם מספר האפשרויות לעלות 2 מדרגות.

באותו אופן מספר המדרגות לעלות 18 מדרגות הוא סכום מספר האפשרויות לעלות 17 מדרגות (כשהצעד האחרון הוא מדרגה אחת) עם מספר האפשרויות לעלות 16 מדרגות (כשהצעד האחרון הוא דילוג של שתי מדרגות).

זוהי החוקיות של סדרת פיבונצ'י. בסדרה זו שני המספרים הראשונים הם 1 ו- 2 לכן מספר האפשרויות לעלות 18 מדרגות הוא המספר ה-19 בסדרת מספרי פיבונצ'י שהוא 6,765

למסיימים

1. א. בחרו מספרים כרצונכם עבור המספרים החמישי והעשירי בסדרה. השלימו את שאר האיברים כך שהסדרה תקיים את החוקיות של סדרת פיבונצ'י.

תשובה

למשל נבחר את המספרים 5 עבור המספר החמישי ו- 6 עבור המספר העשירי.

נסמן את האיבר השישי ב- x

הסדרה מהאיבר החמישי היא: $\mathbf{5}\ ,\ x\ ,\ 5+x\ ,\ 5+2x\ ,\ 10+3x\ ,\ \mathbf{6}$

$6 = 15 + 5x$ לכן $x = -1.8$

הסדרה היא: $\ldots\ \mathbf{6}\ ,\ 4.6\ ,\ 1.4\ ,\ 3.2\ ,\ -1.8\ ,\ \mathbf{5}\ ,\ -6.8\ ,\ 11.8\ ,\ -18.6\ ,\ 30.4$

ב. האם יש הגבלה על המספרים שאפשר לבחור? אם כן מהי? אם לא, הוכיחו.

תשובה

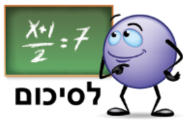
אין הגבלה על המספרים.

נבחר a עבור המספר החמישי ו- b עבור המספר העשירי.

נסמן את האיבר השישי ב- x

הסדרה מהאיבר החמישי היא: $\mathbf{a}\ ,\ x\ ,\ a+x\ ,\ a+2x\ ,\ 2a+3x\ ,\ \mathbf{6}$

$b = 3a + 5x$ לכן $x = \frac{b-3a}{5}$. אין הגבלה על הביטוי הזה.



לסיכום

- בודקים באילו דרכים השלימו התלמידים את הובלה במשימה 3
- בודקים מה מאפיין את הביטויים במשימה 7ד.