



יחידה 9: מספרי פיבונצ'י

9.1 לארנבות באהבה

לפני כ- 800 שנה יצא לאור ספרו של המתמטיקאי פיבונצ'י (Fibonacci), ובו מופיע הסיפור הבא:

מישהו גידל בשדה מגודר זוג ארנבות (זכר ונקבה) שזה עתה נולדו.

הוא רצה לבדוק כמה זוגות של ארנבות יהיו לאחר שנה אחת.

בניח כי,

□ זוג בוגר של ארנבות מוליד זוג נוסף (זכר ונקבה) מדי חודש;

□ הזוג מגיע לבגרות חודשיים מיום היוולדו;

□ אין תמותה כלל.

נחקור את תהליך השינוי של מספר זוגות הארנבות ונברר כמה זוגות ארנבות יהיו אחרי שנה.

כמה זוגות ארנבות?

1. כמה זוגות של ארנבות יהיו לאחר שנה אחת?

תוכלו להיעזר בטבלה כמו זו (עבדו משמאל לימין):

מספר כל הזוגות	זוגות בוגרים (בני חודשיים או יותר)	זוגות בני חודש	זוגות נולדים	תחילת החודש ה-
1	0	0	1	1
1	0	1	0	2
2	1	0	1	3
3	1	1	1	4
	2	1	2	5
				6
				7
				8
				9
				10
				11
				12
				13

סדרת מספרי פיבונצ'י היא סדרת המספרים המציינים את מספרם של כל זוגות הארנבות בכל חודש (העמודה הימנית בטבלה).

2. א. רשמו את עשרת המספרים הראשונים בסדרת מספרי פיבונצ'י.
 ב. מצאו שתי תכונות מעניינות של הסדרה. אפשר להיעזר גם בטבלה.
 ג. נסו להגדיר בדרך אחרת את סדרת פיבונצ'י.
 ד. אילו מספרים רבים יותר בין 20 המספרים הראשונים של סדרת פיבונצ'י: מספרים זוגיים או מספרים אי-זוגיים? הסבירו מדוע.
 ה. קבעו אם המספרים הבאים בסדרה הם זוגיים או אי-זוגיים:
- המספר השלושים בסדרה.
 - המספר המאה בסדרה.
 - המספר המאתיים בסדרה.

3. העתיקו למחברתכם את הטבלה הבאה והשלימו מספרים מתאימים למקומות המסומנים בכוכב.

מספר כל הזוגות	זוגות בוגרים (בני חודשיים או יותר)	זוגות בני חודש	זוגות נולדים	תחילת החודש ה-
*				25
*				26
*				27
317,811	*	*	*	28
514,229	*	*	*	29
*	*	*	*	30
*				31



4. שחזרו בגיליון אלקטרוני את הטבלה ממשימה 2 ובדקו בעזרתה את תשובותיכם למשימות 2, 3 ו-3.

5. העתיקו את הטבלה למחברת והשלימו אותה בעזרת המשתנים a ו- b , אם ידוע שהשורות בטבלה מייצגות חודשים עוקבים.

מספר כל הזוגות	זוגות בוגרים (בני חודשיים או יותר)	זוגות בני חודש	זוגות נולדים
			a
	b		

כאילו פיבונצ'י

הסדרות במשימות הבאות אינן סדרות פיבונצ'י, אבל הן מתנהגות לפי החוקיות של סדרת פיבונצ'י – כל איבר פרט לשני האיברים הראשונים הוא סכום של השניים הקודמים לו.

6. השלימו במחברת את הסדרות הבאות המתנהגות לפי החוקיות של סדרת פיבונצ'י.

א. $3, -4, _, _, _, _$

ב. $_, _, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, _, _$

ג. $3\frac{1}{4}, _, \frac{1}{2}, _, _, _$

ד. $-9, _, _, -5, _, _$

ה. $_, 2, _, _, _, 3$

7. השלימו במחברת את הסדרות הבאות המתנהגות לפי החוקיות של סדרת פיבונצ'י.

א. $_, 2m, d, _, _, _$

ב. $a, _, 0.5a + b, _, _, _$

ג. $_, x, _, _, y, _$

ד. $c, d, _, _, _, _$

ה. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, _, _, _, _$

ו. $_, \frac{1}{x-1}, _, \frac{1}{x+1}, _, _$

$$a \neq 0$$

$$b \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

8. בסדרה הבאה המתנהגת לפי החוקיות של סדרת פיבונצ'י המספרים הראשונים הם בעלי סימנים מתחלפים לסירוגין.

$25, -16, 9, -7, 2, -5, \dots$

תנו דוגמה לסדרה כזו, שהיא בעלת המספר הגדול ביותר של מספרים עם סימנים מתחלפים.



לאונרדו מפיזה (Leonardo da Pisa, 1170-1250) המכונה בשם Fibonacci (בנו של בונצ'י) הנו אולי גדול המתמטיקאים של ימי הביניים. אביו היה סוחר והרבה להפליג בין איטליה וצפון אפריקה. מסיבה זו התחנך ליאונרדו בצפון אפריקה, פגש מדענים ערביים רבים ולמד את שיטות החישוב שלהם. מסתבר כי בזמנו שיטות אלו היו המתקדמות ביותר. בעקבות ספר שכתב הוחלפה במערב השיטה הרומית בשיטה העשרונית. לאונרדו הצטיין בפיתירת בעיות בתורת המספרים.



שומרים על כושר

1. א. הציעו שלוש דרכים שונות לפתרון התרגיל $5\frac{1}{3} \cdot 6\frac{3}{4}$ ללא מחשבון.

ב. רשמו לכל דרך כללי עבודה.

ג. רשמו עבור כל דרך על מה היא מסתמכת, ומדוע היא נכונה.

2. הציעו שתי דרכים שונות לפישוט הביטוי $(a-1)\left(\frac{a+1}{a-1} - \frac{a+1}{a^2-1}\right)$ $a \neq \pm 1$.

ב. רשמו לכל דרך כללי עבודה.

ג. רשמו עבור כל דרך על מה היא מסתמכת, ומדוע היא נכונה.



חידה

כדי להגיע לביתה רותי צריכה לעלות 18 מדרגות. מפעם לפעם רותי מדלגת על מדרגה ועולה שתי מדרגות בבת-אחת. בכמה צורות שונות רותי יכולה לעלות לביתה כאשר בכל צעד היא עולה מדרגה אחת או שתיים?

רמז: סמנו את המדרגות במספרים סידוריים ורשמו סדרה של מספר הצורות שרותי יכולה לעלות אל כל מדרגה בדרך לביתה.