יחידה 8: תכנון לינארי

8.1 במאפיה

מטרות

- עיסוק בסיטואציית בעיית תכנון מן המציאות
- שימוש והעמקה באי-שוויונות בשני משתנים ובגרפים שלהם
- טיפול באילוצים ומציאת התחום המשותף לכל האילוצים
- חשיפה לפונקציה בשני משתנים ומציאת ערך קיצון עבורה בהתחשב בתחום האילוצים.

אמצעי עזר

תוכנה גרפית (*Geogebra*)

דף לצילום

פתיחה

קוראים את הפתיח עם התלמידים והם מבצעים את המשימה שבפתיח. התלמידים נותנים דוגמאות למספר העוגות מכל סוג שמייצרת המאפיה ביום, ומחשבים את מחירן הכולל ואת משקלן הכולל. חשוב לבדוק אם התלמידים מתחשבים באילוצים בדוגמאות שהם נותנים. בהמשך התלמידים עובדים בזוגות כי השיח והדיון ביניהם חשוב ביותר.

פתרונות והערות

הפעילות מפגישה את התלמידים עם התחום המתמטי *תכנון לינארי*. היא עוסקת בסיטואציית בעיה של תכנון שהמודל המתמטי שלה הוא פונקציה לינארית בשני משתנים. בבעיה זו, מחפשים לפונקציה ערך מקסימלי וערך מינימלי, בהתחשב באילוצים מסוימים. לשם כך התלמידים נחשפים למושג *התחום האפשרי* כתחום שבו כל האילוצים מתקיימים, ולומדים לשרטט אותו. הפעילות אינה מלמדת שרטוט של אי-שוויונות בשני משתנים באופן פורמלי, אלא לוקחת בחשבון שטיפול מתמטי באי-שוויונות שנוצרו כתוצאה מנתונים מן המציאות, הוא אינטואיטיבי.

בפעילות יש **שלושה מעגלים**

מעגל ראשון (משימות 1-2) – הכרות ראשונית עם הסיטואציה העלאת השערות ופתרון בדרכים אינטואיטיביות ובניסוי וטעיה – הן לגבי התחום האפשרי והן לגבי פונקצית המטרה.

מעגל שני (משימות 3-7) – הגדרת התחום האפשרי ושרטוטו בשלבים. השלב האחרון הוא אוסף של נקודות שערכיהן שלמים על קטע. שני המקרים הקיצוניים (המקסימום והמינימום) מתקבלים על הקטע הזה.

מעגל שלישי – (משימה 8) התיחסות למטרה בלי להתייחס לפונקציית המטרה. הגדרת פונקציית המטרה תינתן בפעילויות הבאות.

.1 מטרת המשימות 1 ו- 2 **אינה** לפתור את הבעיה בדרך שיטתית אלא בדרך של ניסוי וטעיה. פתרון בדרך שיטתית יתחיל במשימה 3. שתי המשימות הראשונות נועדו להביא להיכרות ראשונית עם שאלות בתכנון לינארי ובמיוחד עם המושג **אילוץ**. בכל סעיף התלמידים אמורים למצוא דוגמאות למספר העוגות מכל סוג ולהתחשב באילוץ הרשום בסעיף ובכל האילוצים בסעיפים הקודמים. יש להנחותם לבדוק בכל פעם אם כל האילוצים אכן מתקיימים. ייתכן שהתלמידים לא יצטרכו לשנות את הצעתם בחלק מן הסעיפים, כי הצעתם הקודמת כבר מתחשבת באילוץ החדש. הדיון עם בן או בת הזוג על ההצעה בכל פעם, אמור לברר למי הצעה טובה יותר. התשובה לשאלה זו אינה חד-משמעית. בני הזוג צריכים להחליט ביחד מה משמעות המילים "טובה יותר". ויש אפשרויות שונות כמו: טובה יותר לקונה (או למוכר) מבחינת מספר העוגות לעומת המחיר, טובה יותר מבחינת משקל העוגות ואולי טובה יותר מבחינת הטעם.

במהלך הפעילות, אחרי שהתלמידים ילמדו לשרטט את התחום האפשרי, הם יווכחו ביעילות של השרטוט למציאת דוגמאות המתחשבות בהרבה אילוצים בו-זמנית.

.2 המשימה נועדה להביא להכרות ראשונית עם הנושא תכנון לינארי, ועם המרכיבים שלו (אילוצים ופונקציית מטרה). בשלב זה הכוונה שהתלמידים יפתרו את המשימה באופן אינטואיטיבי ועל-ידי ניסוי וטעיה. כל תשובה מנומקת תתקבל גם אם לא יגיעו לתשובה הנכונה. בהמשך הפעילות התלמידים יוכלו למצוא את התשובות הנכונות בדרך גרפית.

.3 x מייצג את מספר עוגות הקרם ו- y את מספר עוגות השמרים.

x ו- y מספרים שלמים, $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 60$, $x + y \leq 100$

.4 א. לתחום המתאים שייכות רק נקודות ששיעוריהן שלמים אי-שליליים, כי מדובר במספרי עוגות, ואין מתייחסים לחלק של עוגה. הנקודות האלה נמצאות ברביע הראשון, ועל החלק החיובי של הצירים.

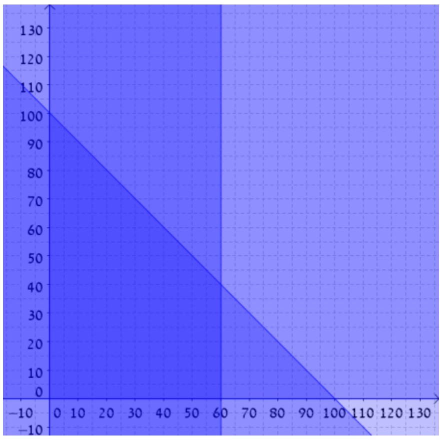
כל הנקודות המתאימות לאילוץ "לכל היותר 60 עוגות קרם" נמצאות על הישר $x = 60$, ומשמאלו.

כל הנקודות המתאימות לאילוץ "סך כל העוגות שהמאפיה מייצרת ביום אינו עולה על 100" נמצאות על הישר $x + y = 100$, ומתחתיו.

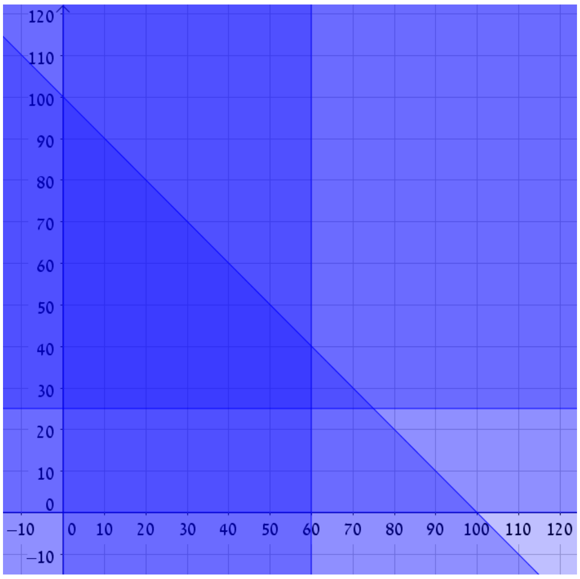
התחום הכהה הוא התחום המכיל את הנקודות המתאימות לכל האילוצים ביחד.

ב. המשימה נועדה לבדוק בדרך גרפית את התשובות למשימות הקודמות, אשר נתנו ללא גרף והיו קשות לבדיקה.

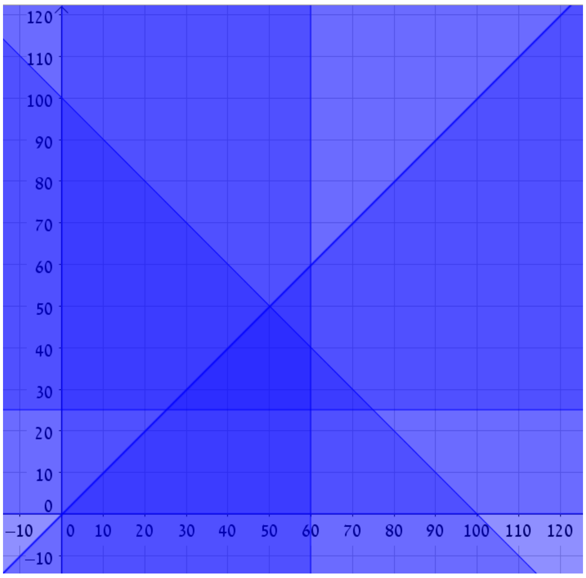
.5 גרף התחום שמשמאל שורטט ב*גאוגברה*.



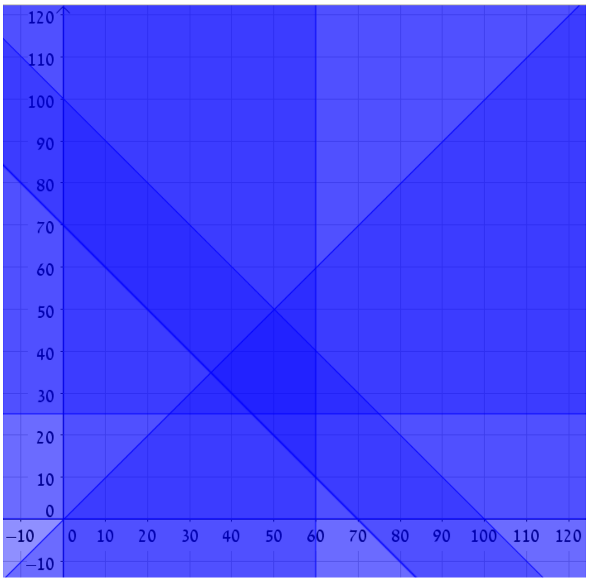
6. א. תוספת האילוץ: $y \ge 25$:



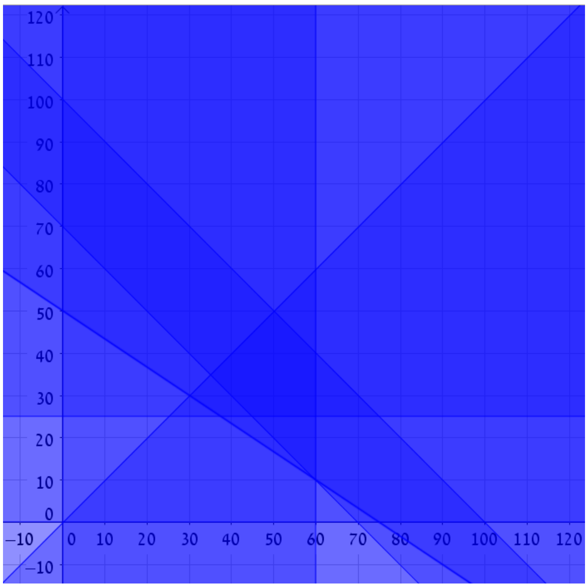
ב. תוספת האילוץ: $y \le x$



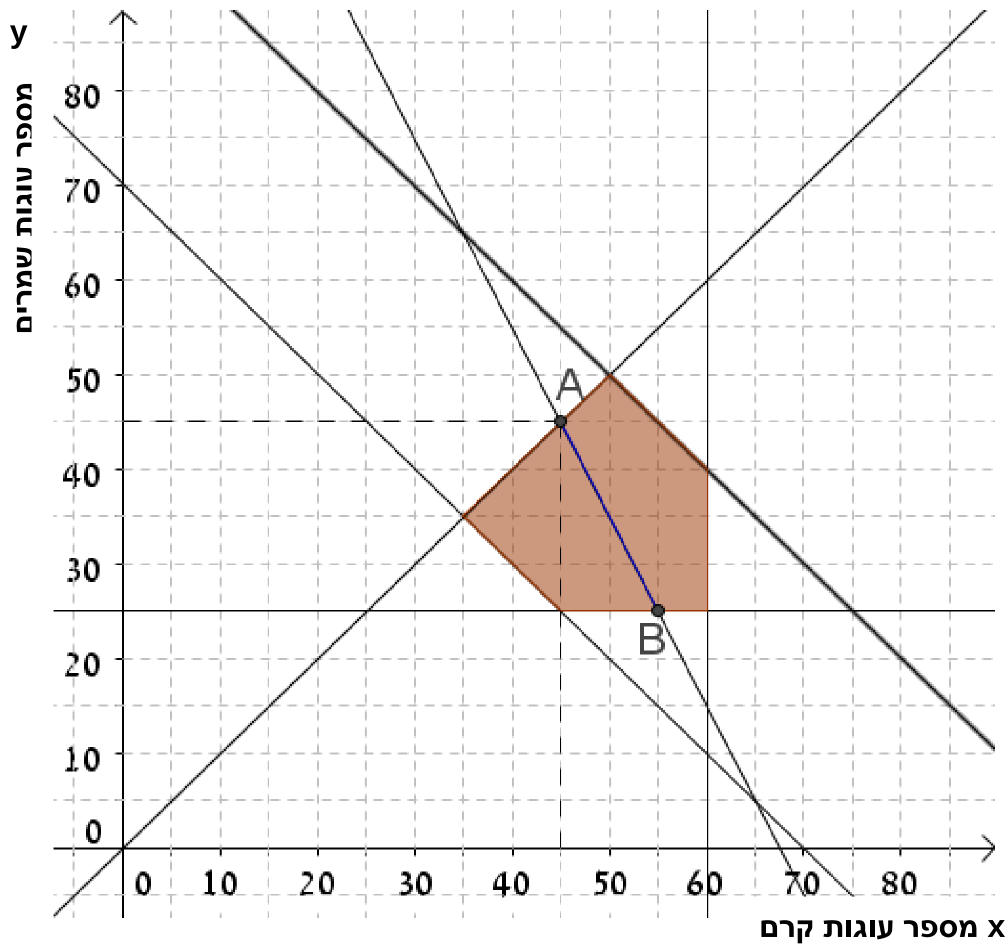
ג. תוספת האילוץ: $x + y \ge 70$



ד. תוספת האילוץ: $50x + 75y \ge 3750$



.7 א. הנקודות המתאימות נמצאות על הקטע הכחול, והוא נמצא על הישר $8x + 4y = 540$.



ב. הנקודות ששיעוריהן שלמים על הקטע הכחול מקיימות את האילוצים הדרושים.

הנקודות המתאימות הן: (45 , 45) , (46 , 43) , (47 , 41) .... (55 , 25) בסך-הכל 10 הזמנות.

.8 א. מר ירקוני קנה 90 עוגות (= 45 + 45).

כל הנקודות על הקטע הכחול (בשרטוט של המשימה הקודמת) מייצגות אותו מחיר. יש למצוא על הקטע הכחול את הנקודות שעבורן $x + y$ (מספר העוגות) הוא הגדול ביותר. נבדוק מספר נקודות על הקטע הזה ונגלה כי ככל שהנקודה גבוהה יותר (קרובה יותר לישר $x + y = 100$) סכום שיעוריה גדול יותר. הנקודה A מייצגת את מספר העוגות המקסימלי בהתחשב באילוצים הנתונים.

ב. הנקודה B מייצגת את הצעתה של המוכרת כי זוהי נקודה על הקטע הכחול ששיעוריה שלמים ושיעור x שלה (מספר עוגות הקרם) הוא הגדול ביותר.

.9 הזזה כזו מזיזה את הישר במקביל לכן היחס בין הפרמטרים a ו- b אינו משתנה. משתנה רק הפרמטר c.

כאשר מזיזים את הישר לכיוון אחד פרמטר c גדל באופן עקבי. הזזה לכיוון השני מקטינה את הפרמטר c.

שומרים על כושר

1. א. BC: $y = 3$ הפונקציה קבועה AB: $x - y = -5$ השיפוע חיובי AC: $y + 2x = 8$ השיפוע שלילי

ב. פותרים 3 מערכות משוואות. שיעורי הנקודות הם: $A(1 , 6)$, $B(-2 , 3)$, $C(2.5 , 3)$

ג. $y \ge 3$ וגם $x - y \ge -5$ וגם $y + 2x \le 8$

מציעים לתלמידים לבדוק את האי-שוויונות שכתבו על-ידי הצבת נקודה מן התחום.

2. א. **טלי** חילקה את המשוואה הראשונה ב- 2 ואחר חיברה את שתי המשוואות.

רחל בודדה את 2x מהמשוואה הראשונה והציבה את התוצאה במשוואה השנייה.

אורית בודדה את y מן המשוואה השנייה, כנראה על מנת להציבו המשוואה הראשונה.

דינה חיסרה את המשוואה השנייה מהראשונה.

ג.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 4y = -9 \end{cases}$$

$3x = -3$

$x = -1$

$-2 + 4y = 6$

$4y = 8$

$y = 2$

הפתרון $(-1 , 2)$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 4y = -9 \end{cases}$$

$4y = x + 9$

$2x + (x + 9) = 6$

$3x = -3$

$x = -1$

$4y = 8$

$y = 2$

הפתרון $(-1 , 2)$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 4y = -9 \end{cases}$$

$4y = 6 - 2x$

$4y = x + 9$

$6 - 2x = x + 9$

$-3x = 3$

$x = -1$

על-ידי הצבה: $y = 2$

הפתרון $(-1 , 2)$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 4y = -9 \end{cases}$$

$x = 4y - 9$

$2(4y - 9) + 4y = 6$

$8y - 18 + 4y = 6$

$12y = 24$

$y = 2$

$x = 8 - 9 = -1$

הפתרון $(-1 , 2)$

בכיסי יש 90 מטבעות של עשר אגורות, 6 מטבעות של חצי שקל, ו- 4 מטבעות של שקל אחד.

נסמן

ב- x את מספר המטבעות של 10 אגורות,

ב- y את מספר המטבעות של חצי שקל

וב- z את מספר המטבעות של שקל אחד.

$x + y + z = 100$

$\underline{0.1x + 0.5y + z = 16}$

$x + y + z = 100$

נכפול ב- 10 $\underline{x + 5y + 10z = 160}$

נפחית את המשוואה הראשונה מהשנייה: $4y + 9z = 60$

נחפש פתרונות טבעיים למשוואה.

z אינו גדול מ- 6 – אחרת y שלילי. z חייב להיות זוגי – אחרת y אינו שלם.

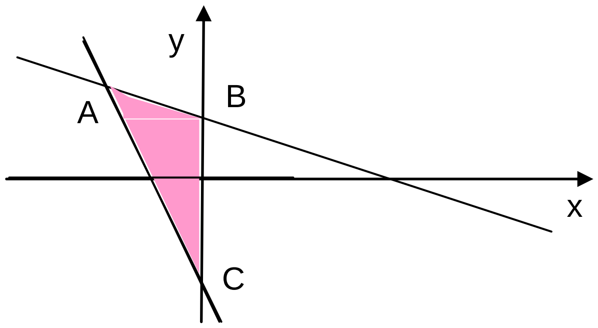
המספר היחיד עבור z הנותן פתרונות טבעיים הוא $z = 4$. לכן, $y = 6$ ו- $x = 90$

ואמנם בכיסי 16 שקלים $(=90\cdot 0.1+6\cdot 0.5+4\cdot 1)$

למסיימים

1. א. שרטטו במערכת צירים אחת את הישרים $y = -2x - 3$ ו- $x + 3y = 6$. צבעו את התחום המשולש המוגבל בישרים אלו ובציר ה- y .

תשובה



ב. רשמו מערכת של אי-שוויונות שתתאר את האזור הצבוע.

תשובה

$x < 0$

$y > -2x - 3$

$\underline{x + 3y < 6}$

ג. מהו שטח המשולש הצבוע?

תשובה

קודקודי המשולש הם (3 , 3–)A , ‏(2 , 0)B , ‏(3– , 0)C.

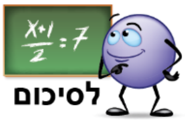
נחשב את שטחו על-ידי אורך הצלע BC – 5 יחידות, והגובה אליה – 3 יחידות, שהוא המרחק של הנקודה A מציר ה- y. השטח 7.5 יח"ר $\left(=\frac{5\cdot 3}{2}\right)$

ד. מהו שטח המרובע המוגבל בשני הישרים ובשני הצירים?

תשובה

שטח המרובע הוא ההפרש בין שטח המשולש הצבוע לבין שטח המשולש שמתחת לציר ה- x.

שטח זה הוא 5.25 יח"ר $\left(=7.5-\frac{1.5\cdot 3}{2}\right)$



לסיכום

- בודקים את הצעות התלמידים בתחילת השיעור ומבררים באיזו דרך פעלו
- משווים בין הדרכים האינטואיטיביות לדרך השיטתית
- מתייחסים לדרך שבה התלמידים מצאו פתרון גרפי של אי-שוויון לינארי בשני משתנים
- מביאים דוגמאות לתחומים שבהם יש שימוש לתכנון לינארי (חקלאות, תזונה, כלכלה וכדומה)