



יחידה 8: תכנון לינארי

8.1 במאפייה

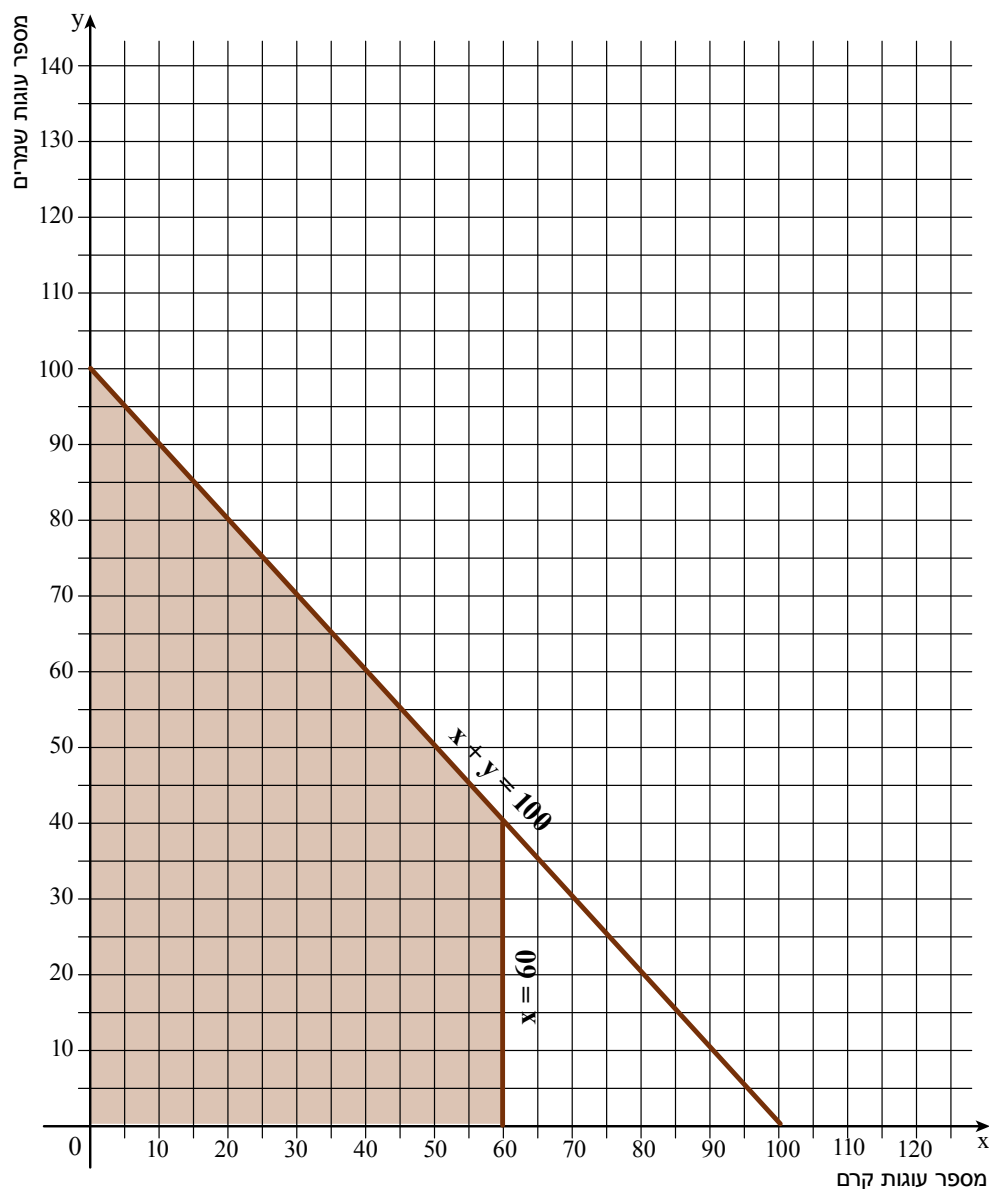
מאפיית טעים לי מייצרת עוגות שמרים ועוגות קרם. סך כל העוגות שהמאפייה מייצרת ביום אינו עולה על 100, מהן לכל היותר 60 עוגות קרם. משקל עוגת קרם הוא 50 גרם, ומשקל עוגת שמרים 75 גרם. מחיר עוגת קרם הוא 8 ש"ח, ומחיר עוגת שמרים 4 ש"ח. רשמו דוגמה למספר עוגות הקרם ומספר עוגות השמרים שמייצרת המאפייה ביום. מצאו את המשקל הכולל ואת המחיר הכולל של העוגות בדוגמה שלכם. **נחקור אפשרויות שונות למכירת עוגות בהיתן מגבלות שונות.**

עבדו בזוגות.

1. מר ירקוני התנדב לקנות עוגות למסיבת סוף השנה של בתו יעל. בכל סעיף תינתן מגבלה (אילוץ) **נוספת** למגבלות שבפתיח ושל הסעיפים הקודמים, המשפיעה על מספר העוגות מכל סוג שמר ירקוני יכול לקנות.
בכל סעיף הציעו למר ירקוני הצעה למספר עוגות הקרם ומספר עוגות השמרים שכדאי לו לקנות בהתאם למגבלות (של סעיף זה ושל הסעיפים הקודמים). אחר-כך השוו את הצעתכם עם זו של בן או בת זוגכם ודונו בשאלה למי הצעה טובה יותר.
א. מר ירקוני רוצה לקנות 25 עוגות שמרים לפחות.
ב. מר ירקוני רוצה שמספר עוגות השמרים לא יעלה על מספר עוגות הקרם.
ג. מר ירקוני רוצה לקנות 70 עוגות לפחות.
ד. מר ירקוני רוצה שמשקל העוגות יהיה 3.750 ק"ג לפחות.
2. בסופו של דבר החליט מר ירקוני לקנות עוגות לפי כל הדרישות שלו (ראו משימה 1) במחיר של 540 ש"ח.
א. המטרה של מר ירקוני היא לקנות במחיר הזה מספר גדול ככל האפשר של עוגות. כמה עוגות, לדעתכם, הוא קנה? הסבירו.
ב. מטרת המאפייה למכור מספר גדול ככל האפשר של עוגות קרם, כי הן מתקלקלות מהר יותר. מה לדעתכם תהיה המלצת המאפייה למר ירקוני?

3. סמנו את מספר עוגות הקרם ב- x ואת מספר עוגות השמרים ב- y .
 התחום המתאים לתוכן הבעיה שבפתיח הוא אוסף כל זוגות הערכים (x, y) , ו- x מספרים שלמים לא שליליים, המקיימים את האילוצים המתוארים במשימת הפתיחה.
 רשמו באמצעות המשתנים את האילוצים לפי הפתיח.

4. במערכת הצירים הבאה כל הנקודות ששיעוריהן מספרים שלמים בתוך התחום הצבוע ועל גבולותיו, מהוות את התחום המתאים לתוכן הבעיה שבפתיח.



א. התוכלו להסביר מדוע?

ב. מצאו את המקום המשוער של הנקודות המתאימות להצעותיכם מהמשימות הקודמות. האם כולן נמצאות בתוך תחום זה?

אוסף כל הפתרונות האפשריים של בעיה נקרא **התחום האפשרי**.



5. שרטטו במחשב את האילוצים שבפתיח – כלומר את האי-שוויונים שרשמתם במשימה 3, ותקבלו את התחום האפשרי ממשימה 4. דאגו שגם הגבולות של התחום ייכללו בשרטוט.

במשימה הבאה נשנה בשלבים את התחום האפשרי, כך שיכלול את כל התנאים של מר ירקוני ממשימה 1. אם אין ברשותכם מחשב, תוכלו לצלם את הדף שבסוף הפעילות ולהמשיך את הפעילות בעזרת הדף המצולם.

6. בכל אחד מהסעיפים הבאים מר ירקוני מציב אילוץ נוסף. שנו אם צריך את התחום האפשרי בהתאם לאילוץ הנוסף שרשום בסעיף ובהתאם לכל האילוצים הקודמים.

א. 25 עוגות שמרים לפחות.

(שימו לב, 25 עוגות קרם לפחות פירושו 25 עוגות קרם או יותר).

הדרכה: תרגמו לאי-שוויון, שרטטו את הישר המתאים והחליטו באיזה צד של הישר נמצאות הנקודות המקיימות את התנאי.

ב. מספר עוגות השמרים לא יעלה על מספר עוגות הקרם.

ג. 70 עוגות לפחות.

ד. משקל העוגות יהיה 3.750 ק"ג לפחות.

7. מר ירקוני החליט לקנות עוגות במחיר 540 ש"ח.

א. סמנו במערכת הצירים את הישר שעליו נמצאות הנקודות המתאימות לנתון זה.

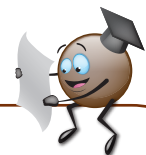
ב. כמה הזמנות שונות מקיימות את כל האילוצים שבמשימה 5 ואת התנאי שבמשימה 6?

8. א. מר ירקוני רוצה לקנות במחיר 540 ש"ח מספר עוגות גדול ככל האפשר.

כמה עוגות קרם וכמה עוגות שמרים הוא קנה?

הסבירו איך הגעתם לתשובה. השוו עם תשובותיכם במשימה 2.

ב. המוכרת במאפייה הציעה למר ירקוני לקנות בתקציב שלו מספר גדול ככל האפשר של עוגות קרם. סמנו במערכת הצירים את הנקודה המתאימה להצעה זו.



הבעיה שעסקתם בה שייכת לתחום מתמטי הנקרא **תכנון לינארי**. במקרה שלנו זוהי בעיה של תכנון הקנייה של עוגות משני סוגים. התכנון נקרא לינארי כי האילוצים מיוצגים על-ידי אי-שוויונים לינאריים (קווים).



תכנון לינארי הוא תחום במתמטיקה שימושית שנוצר במקורו לאור צרכים של הצבא האמריקני במלחמת העולם השנייה. יוצר התחום הוא ג'ורג' דנציג (George Dantzig) שנולד בארה"ב למשפחה ענייה שהיגרה מרוסיה.

אביו של ג'ורג' היה מתמטיקאי, והבן הלך בעקבותיו. בתחילת לימודיו לדוקטורט בשנת 1939, קרה לו מקרה מדהים. הוא הגיע מאוחר לאחד השיעורים, ראה על הלוח שתי בעיות והעתיק אותן למחברתו כשהוא סבור שאלו הם שיעורי הבית. הוא פתר והגיש אותן באיחור והתנצל שהפעם הבעיות היו קשות מהרגיל. שישה שבועות מאוחר יותר המנחה שלו התפרץ לביתו ואמר בהתרגשות: "כרגע כתבתי את המבוא לאחד המאמרים שלך לדוקטורט. "קרא אותו כדי שאוכל לשלוח את המאמר מיד לפרסום". רק אז התברר לתלמיד המאחר כי המורה שלו רשם על הלוח באותו שיעור שני משפטים בסטטיסטיקה שטרם נמצאה להם הוכחה, ושהוא היה הראשון שהצליח לעשות זאת.



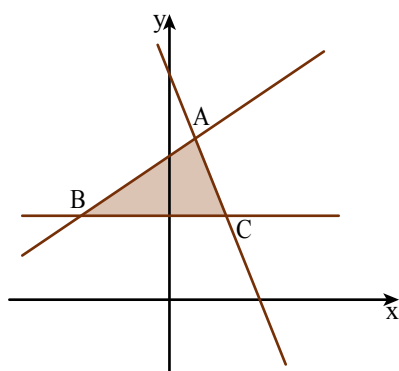
באמצעות תוכנה מחוללת גרפים (למשל, גאוגברה) תוכלו להיווכח כי פתרון לאי-שוויון לינארי הוא כל הנקודות הנמצאות **מצד אחד** של הישר המתאים.

9. א. שרטטו במחשב משוואה של ישר מהצורה $ax + by = c$. בחרו את הפרמטרים a, b, c ו- c כרצונכם.

ב. תפסו בישר, הזיזו אותו לכיוון אחד והתבוננו במשוואה. הזיזו את הישר לכיוון הפוך והתבוננו במשוואה. כיצד משתנים הפרמטרים a, b, c ו- c כתוצאה מהזזת הישר?



שומרים על כושר



1. בשרטוט שלפניכם גרפים של המשוואות הבאות:

$$y + 2x = 8$$

$$x - y = -5$$

$$y = 3$$

א. זהו איזו משוואה שייכת לכל גרף.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C.

ג. כתבו מערכת של אי-שיוויונים שהגרף שלה הוא המשולש המשורטט.

$$2. \quad \begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת משוואות:}$$

טלי, רחל אורית ודינה פתרו את מערכת המשוואות, כל אחת בדרך אחרת.

רחל התחילה לפתור כך:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 10 + 2y \\ 10 + 2y + y &= 1 \\ 10 + 3y &= 1 \end{aligned}$$

טלי התחילה לפתור כך:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$3x = 6$$

דינה התחילה לפתור כך:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$-3y = 9$$

אורית התחילה לפתור כך:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$y = 1 - 2x$$

א. הסבירו את דרך הפתרון של כל תלמידה.

ב. בחרו אחת מן הדרכים וסיימו לפתור את מערכת המשוואות.

$$ג. \quad \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 4y = -9 \end{cases} \quad \text{פתרו ב- 4 דרכים שונות את מערכת המשוואות הבאה:}$$

חידה



בכיס יש 100 מטבעות משלושה סוגים: שקל, חצי שקל ועשר אגורות. בסך-הכול יש בכיס 16 שקלים. כמה מטבעות מכל סוג יש בכיס?

דף לצילום

