7.2 השתנות משולש שווה צלעות

מטרות

- לחקור תופעה המקשרת בין שני התחומים המרכזיים הנלמדים בכיתה ט: גאומטריה ופונקציות.
- לשלב הסברים גיאומטריים והסברים אלגבריים.
- לקשר בין ייצוגים שונים: מילולי, חזותי, גאומטרי, אלגברי וגרפי.
- לחקור תופעות המובילות להשערות מנוגדות לממצאים ולהפתעות, וכך ליצור צורך להוכיח.

אמצעי עזר

ישומונים:

- שטח משולש לפי הצלע השלישית
- שטח משולש לפי הגובה לצלע השלישית

שטח משולש לפי אורך הצלע השלישית

פתיחה

מבקשים מהתלמידים להסתכל במשימת הפתיחה שבמסגרת ולציין עבור איזה משולש מסוג זה מתקבל השטח המקסימלי. מזכירים את המשימות שביצעו בפעילות 7.1 ומציינים שפעילות זו היא המשך של הפעילות הנ"ל.

תשובות צפויות: אם התלמידים בצעו את המשימות בפעילות 7.1 סביר להניח שיציעו שהשטח המקסימלי יתקבל כאשר המשולש ישר-זווית. (כלומר, כאשר הצלעות שאורכן 3 יחידות ו- 4 יחידות הן ניצבי המשולש.)
בשלב זה עדיין אין צורך לחזור על ההסבר שניתן בפעילות הקודמת.

פתרונות והערות

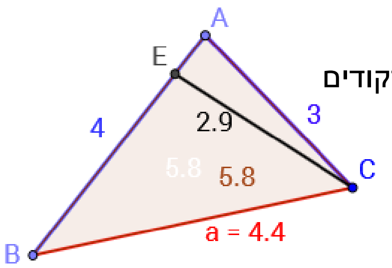
1. א. אורך הצלע נע בין 1 ל- 7 יחידות. אפשר להיעזר בשרטוטים שבמסגרת ולקבוע בעזרתם את קצות התחום:

- האורך המינימלי של הצלע BC הוא 1, כאשר הנקודה הצלעות AB ו- AC מתלכדות.
- האורך המקסימלי של הצלע BC הוא 7, הצלע AB נמצאת על המשך הצלע AC.

ב. מסמנים את שתי נקודות הקצה של התחום: (1,0) ו- (7,0) ואת הנקודות המתאימות למשולשים המשורטטים במסגרת: (1.7,2.3) , (3.1,4.6) , (5,6) , (6.2,5).
משרטטים את הגרף הדומה לגרפים ששורטטו במשימות בפעילות 7.1.

.2 פותחים את הישומון **שטח משולש לפי הצלע השלישית,** או מקישים על הקישור: http://ggbtu.be/muHDijKFs

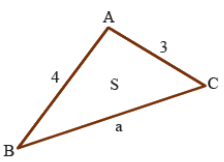
אם התלמידים עדיין לא שרטטו גרף משוער, משרטטים אותו כעת, ומסבירים מדוע השטח המקסימלי מתקבל כשהזווית A ישרה:

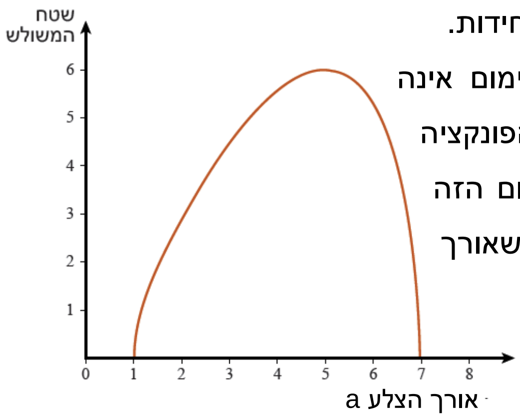


אחרי שמשרטטים את הגובה מהקדקוד C לצלע AB, גוררים קדקודים ומסיקים כי השטח השווה ל- $\frac{4\cdot CE}{2}$ יהיה מקסימלי כאשר אורך CE מקסימלי. זה קורה כאשר CE מתלכד עם AC ואורכו שווה ל- 3.

לכן, השטח המקסימלי הוא 6 יחידות שטח.

באמצעות גרירת קדקודים ביישומון, או לפי משפט פיתגורס, אפשר למצוא את אורך הצלע a (היתר) המתאימה לשטח הזה. האורך הוא 5 יחידות.



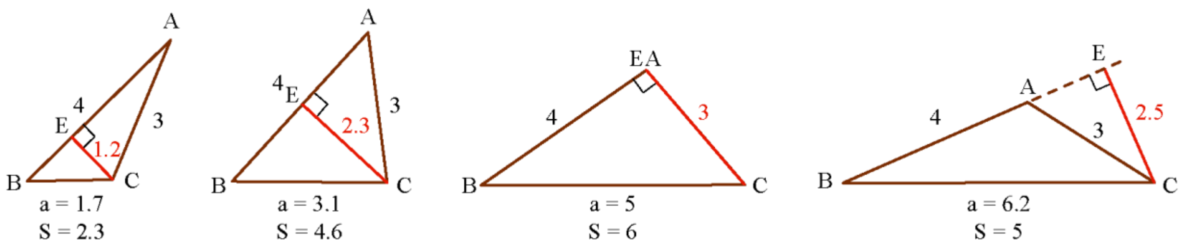


הגרף אינו סימטרי, כי נקודת המקסימום אינה נמצאת באמצע התחום. התחום של הפונקציה הזו הוא מ- 1 ועד ל- 7, ואמצע התחום הזה הוא 4. נקודת המקסימום מתקבלת כשאורך הבסיס 5 יחידות (ולא 4 יחידות).

.3 תלמידים שאינם משתמשים בישומון פותרים את משימה 3.

ב. הגרף אינו עובר דרך ראשית הצירים מאחר ואורך הצלע a הקטן ביותר האפשרי הוא 1 ס"מ. כאמו לעיל קצות הגרף הם בנקודות: (1,0) ו- (7,0).

ג. בסעיף זה, מופיעים שרטוטים של משולשים עם גובה מהקדקוד C לצלע AB. המטרה היא לעזור לתלמידים להסיק שאורך הגובה הזה הוא לכל היותר 3 ס"מ.



האורך שווה ל- 3 ס"מ כאשר הגובה CE מתלכד עם הצלע AC של המשולש. בכל שאר המקרים נוצר משולש CEB ישר-זווית, שהגובה CE (לצלע AC) ניצב של המשולש, והצלע a היא היתר של המשולש.

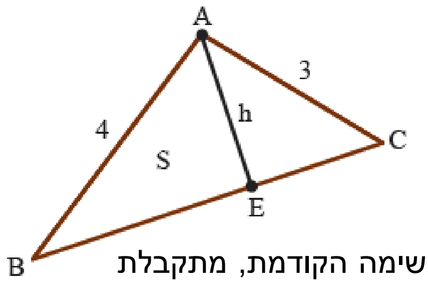
ד. לפי משפט פיתגורס, מוצאים שאורך הצלע a כשהשטח מקסימלי הוא 5 ס"מ.

ה. הגרף אינו סימטרי מאחר ונקודת המקסימום (5,6) אינה באמצע התחום. (אמצע התחום במקרה זה הוא 4.)

שטח משולש לפי אורך הגובה לצלע השלישית

בשלוש משימות קודמות, בהן התקבלו גרפים לא סימטריים עם נקודת קיצון המתאימה למקרה בו המשולש ישר-זווית (הזווית הישרה כלואה בין הצלעות שאורכן אינו משתנה). באופן מפתיע הגרף המתאים למקרה הזה שונה לחלוטין.

4. בעקבות המשימה הקודמת, משערים מהי צורת הגרף המתאים לשטח משולש שאורכי שתיים מצלעותיו 3 ס"מ ו- 4 ס"מ, לפי אורך הגובה לצלע השלישית (h).



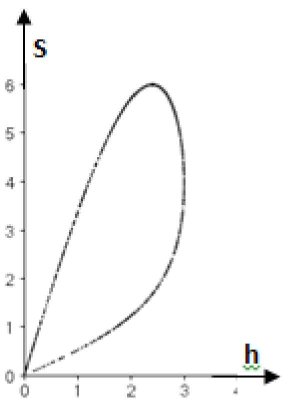
א. אורך הגובה לצלע נע בין 0 ל- 3 ס"מ, מאחר שהוא ניצב במשולש ישר-זווית AEC ולכן קטן או שווה לאורך היתר AC ששווה ל- 3.

ב. שטח המשולש משתנה בין 0 ל- 6 סמ"ר. נקודת המקסימום כבמשימה הקודמת, מתקבלת כשהמשולש הוא ישר-זווית. ההסבר שוב בעזרת גובה מ- C ל- AB.)

ג. התלמידים משרטטים סקיצה של גרף משוער המתאר את שטח המשולש כפונקציה של אורך הגובה לצלע (h).

תשובה צפויה: בעקבות ההתנסויות הקודמות, התלמידים משרטטים סקיצה דומה לסקיצות הקודמות: גרף הדומה לזה שבמשימה 1 – כלומר, גרף שאינו סימטרי עם נקודת מקסימום כשהשטח הוא 6 סמ"ר.

5. בודקים את ההשערה על-ידי שרטוט הגרף באמצעות המחשב.



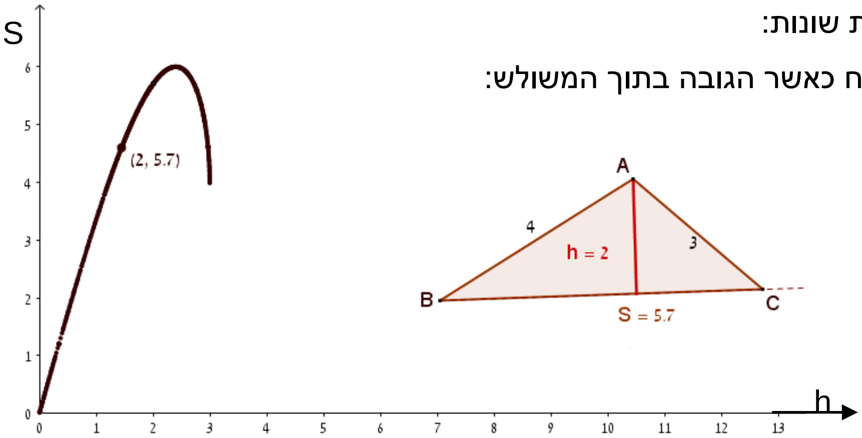
כאמור, תוצאות מפתיעות מעוררות את הצורך בהסבר ומסייעות בהדגשת תפקידי ההוכחה, כמשכנעת וכמסבירה נכונות של טענות.

כדי לעזור בהסבר, שואלים כמה שטחים מתאימים לגובה באורך 2 יחידות, וכמה שטחים מתאימים לגובה באורך 1.5 יחידות. מוצאים שיש שני שטחים מתאימים לגובה באורך 2 יחידות: 5.7 יחידות שטח ו- 1.22 יחידות שטח, ושני שטחים מתאימים לגובה באורך 1.5 יחידות: 0.8 יחידות שטח ו- 4.7 יחידות שטח.

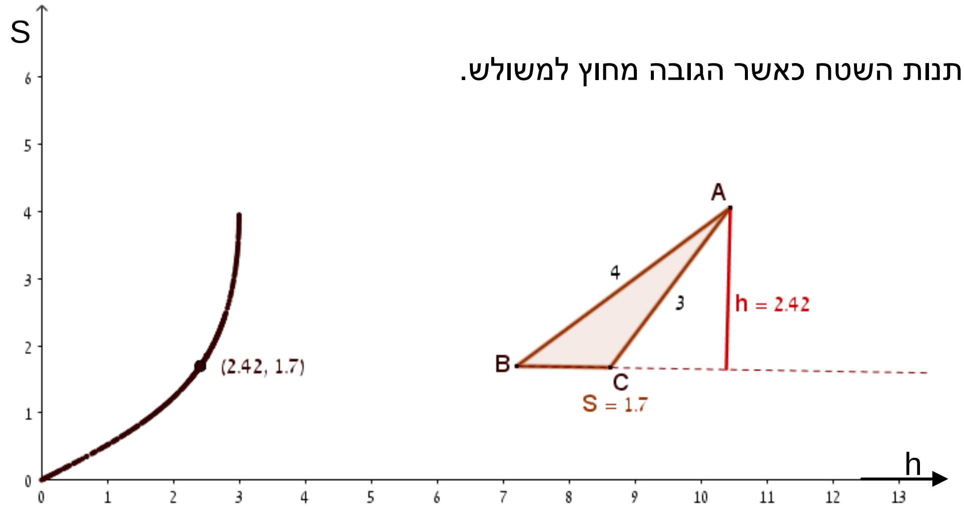
הגרירה והמעקב אחר השתנות השטח בהתאם להשתנות הגובה, ממחישה שלכל גובה (פרט למקרה של גובה באורך 3 יחידות שאליו נתייחס בהמשך) מתאימים שני שטחים שונים: האחד משולש שבו הגובה נמצא בתוך המשולש, והאחר – משולש שבו הגובה נמצא מחוץ למשולש.

בשלב זה התלמידים מציינים בדרך כלל, כי הגרף אינו מתאר פונקציה. כעת מראים שהגרף שהתקבל מציג גרפים של שתי פונקציות שונות:

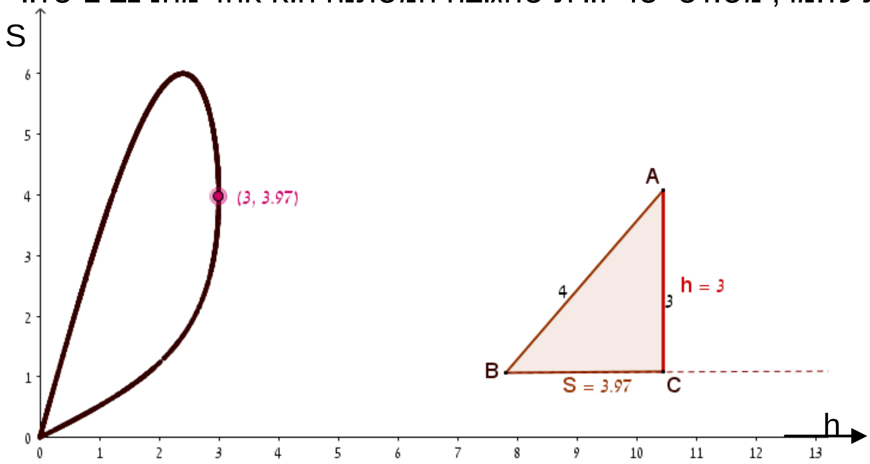
אחת מתארת את השתנות השטח כאשר הגובה בתוך המשולש:



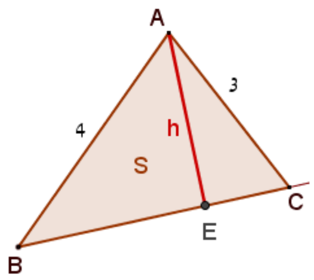
השנייה מתארת את השתנות השטח כאשר הגובה מחוץ למשולש.



לשני הגרפים נקודת קצה משותפת (3,3.97) המייצגת את המשולש שבו הגובה מתלכד עם הצלע שאורכה 3 יחידות כלומר, משולש ישר-זווית שהגובה המשתנה הוא אחד מהניצבים שלו.



בפעילות זו נוח להסביר את הגרף בדרך אלגברית. נרשום ייצוג אלגברי לפונקציה S המתאימה לאורך הגובה (h) את שטח המשולש.

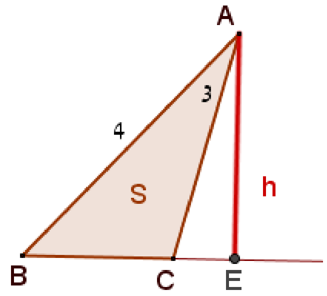


נתבונן בשני המקרים:

<u>מקרה 1:</u> הגובה בתוך המשולש.

$BE=\sqrt{16-h^2}$, $CE=\sqrt{9-h^2}$

לכן שטח המשולש ABC הוא: $S=\dfrac{h\cdot(\sqrt{16-h^2}+\sqrt{9-h^2})}{2}$



<u>מקרה 2:</u> הגובה מחוץ למשולש.

$BE=\sqrt{16-h^2}$ $CE=\sqrt{9-h^2}$

לכן שטח המשולש ABC הוא: $S=\dfrac{h\cdot(\sqrt{16-h^2}-\sqrt{9-h^2})}{2}$

כשנציב בביטויים האלגבריים h=3 נקבל בשני המקרים CE=0 והשטח $S=\dfrac{3\cdot(\sqrt{16-3^2})}{2}=3.97$.

כלומר, הנקודה (3 , 3.97) משותפת לשתי הפונקציות.

6. בסעיפי משימת התחליף הזו מופיעות שאלות דומות לאלו שבישומון במטרה לאפשר לתלמידים לשרטט את הגרף ולראות שמדובר למעשה בשתי פונקציות להן נקודה משותפת כש: h=3.

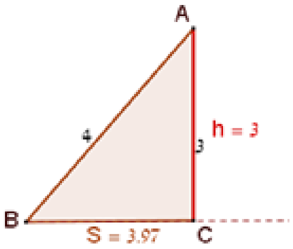
א. התלמידים רגילים לדוגמאות בהם לשני גבהים שונים מתאים אותו שטח, כאן בנוסף לכך לכל שטח מתאימים שני גבהים (פרט לנקודת המקסימום).

התלמידים מוצאים שני זוגות של משולשים להם אותו גובה ושטח שונה: שני משולשים שהגובה שווה ל- 2 ס"מ ושני משולשים שהגובה שלהם 1.5 ס"מ.

לגובה 2 ס"מ מתאימים השטחים 5.4 סמ"ר ו- 1.2 סמ"ר, ולגובה 1.5 ס"מ מתאימים השטחים 0.8 סמ"ר ו- 4.7 סמ"ר.

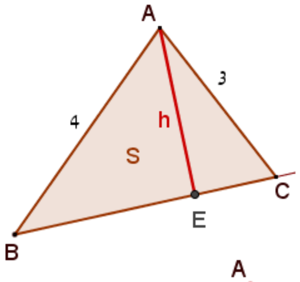
בשלב זה כדאי להפנות את התלמידים לגרף המשוער ששרטטו ולבדוק אם הוא מתאים ואם לא, מדוע לא. (סביר להניח שהם שרטטו גרף בו לשני גבהים שונים מתאים אותו שטח, ולא גרף שבו בנוסף גם לשני שטחים שונים מתאים אותו גובה.)

ב. כעת מופיע הגרף והתלמידים בדרך כלל, מציינים שהגרף איננו גרף של פונקציה, והגרף המשוער ששרטטו אינו מתאים. ההסבר הצפוי בשלב זה הוא: אותו אורך גובה מתקבל פעם כשהגובה בתוך המשולש ופעם כשהגובה מחוץ למשולש כמו בדוגמאות שבסעיף א.

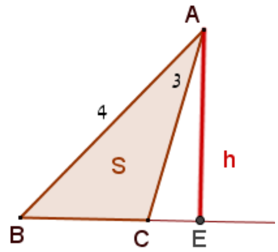


השרטוטים כאן בפתרונות למשימה 5 ממחישים שמדובר בשתי פונקציות להן נקודה משותפת (3,3.97) כאשר הגובה מתלכד עם הצלע שאורכה 3 ס"מ, ו- $\measuredangle ACB=90^\circ$. הייצוג האלגברי בסעיף הבא עוזר להבין הסבר זה.

ג. במשימה זו הייצוג האלגברי עוזר להסביר את צורת הגרף. רושמים שתי פונקציות המתאימות לאורך הגובה (h) את שטח המשולש S.



האחת כשהגובה בתוך המשולש: $S=\dfrac{h\cdot(\sqrt{16-h^2}+\sqrt{9-h^2})}{2}$

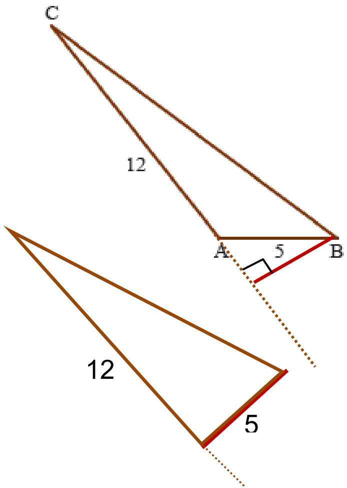


והשנייה כשהגובה מחוץ למשולש: $S=\dfrac{h\cdot(\sqrt{16-h^2}-\sqrt{9-h^2})}{2}$

הפירוט רשום כאן בפתרונות למשימה 5.

כשמציבים בביטויים האלגבריים h=3 מתקבל בשני המקרים CE=0 .

השטח $S=\dfrac{3\cdot\sqrt{16-3^2}}{2}=3.97$. כלומר, הנקודה (3 , 3.97) משותפת לשתי הפונקציות.



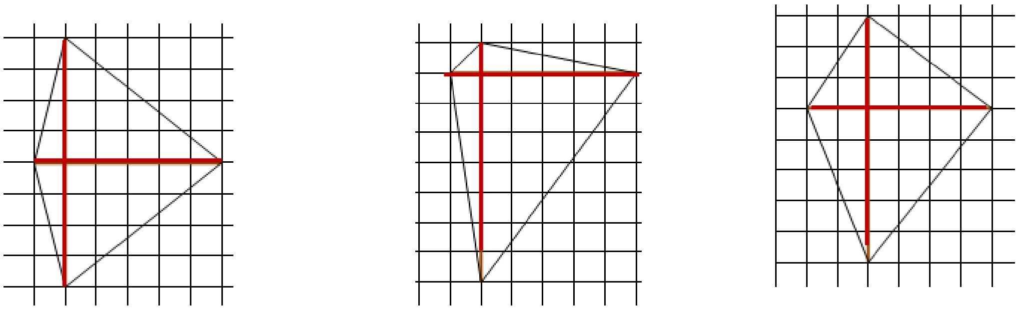
1. א. כמו במשימות הקודמות השטח המקסימלי מתקבל כשאורך הגובה מ- B לצלע AC מקסימלי. זה קורה כאשר הגובה הזה מתלכד עם הצלע AB ואורכו 5 ס"מ.

במקרה זה המשולש ישר-זווית ($\measuredangle A=90^\circ$).

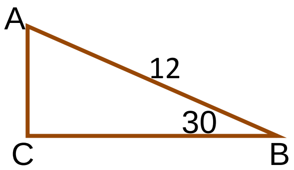
ב. השטח המקסימלי של המשולש הוא 30 סמ"ר.

ג. לפי משפט פיתגורס, אורך הצלע השלישית 13 ס"מ, וההיקף שווה ל- 30 סמ"ר.

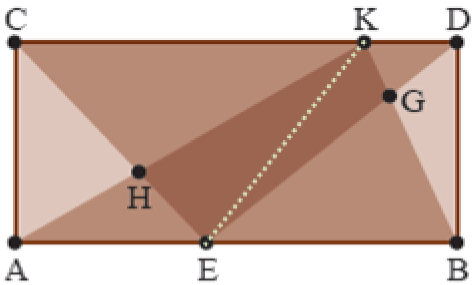
2. א. השרטוטים הבאים מדגימים שאפשר לקבל מרובעים כלשהם ולאו דווקא מרובעים בעלי שם מסוים.



ב. שטח של כל מרובע שאלכסוניו מאונכים ואורכם 6 ס"מ ו- 8 ס"מ הוא 24 סמ"ר.



3. א. הניצב שמול זווית שגודלה $30°$ שווה באורכו למחצית אורך היתר, ולכן אורך הניצב AC שווה ל- 6 ס"מ.
לפי משפט פיתגורס, אורך הניצב CB הוא 10.4 ס"מ, ושטח המשולש שווה למחצית מכפלת אורכי הניצבים: 31.2 סמ"ר.
ב. שטח המשולש (31.2 סמ"ר) שווה למחצית אורך הגובה ליתר כפול 12, לכן אורך הגובה ליתר שווה ל- 5.2 ס"מ.

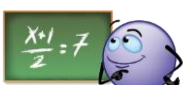


4. א. $S_{\Delta KEB} = S_{\Delta DBE}$ כי לשני המשולשים האלה צלע משותפת EB, והקדקודים K ו- D נמצאים על CD מקביל לצלע המשותפת.
ב. נוריד מכל אחד משטחי המשולשים שבסעיף א' את שטח משולש KGE ונקבל השוויון $S_{\Delta DGB} = S_{\Delta KGE}$.
ג. באופן דומה לסעיפים א ו- ב מוכיחים $S_{\Delta CHA} = S_{\Delta KHE}$ ואז מחברים:

$$S_{\Delta DGB} = S_{\Delta KGE}$$

$$\underline{S_{\Delta CHA} = S_{\Delta KHE}}$$

$$S_{\Delta DGB} + S_{\Delta CHA} = S_{KHEG}.$$



לסיכום

פעילות 7.2 **משולש שונה צלעות וגרף**, היא פעילות המשך לפעילות 7.1. המשימה הראשונה מהווה למעשה תזכורת למה שנעשה בפעילות 7.1 ועוזרת ביצירת ההפתעה במשימה השנייה שהיא המשימה העיקרית בפעילות זו.

חשוב להדגיש את תפקידי ההוכחה גיאומטרית או אלגברית, כמסבירה ממצאים מתמטיים.