יחידה 7: גיאומטריה גרפים וגופים

7.1 השתנות משולש שווה-שוקיים

מטרות

- לחקור תופעה המקשרת בין שני התחומים המרכזיים הנלמדים בכיתה ט: גאומטריה ופונקציות.
- לשלב הסברים גיאומטריים והסברים אלגבריים.
- לקשר בין ייצוגים שונים: מילולי, חזותי, גאומטרי, אלגברי וגרפי.
- לחקור תופעות המובילות להשערות מנוגדות לממצאים, וכך להכיר בצורך להסביר ולהוכיח.

אמצעי עזר

ישומונים:

- שטח שווה-שוקיים לפי בסיס
- שווה-שוקיים לפי זווית הראש
- שווה-שוקיים גובה וגרף.

שטח משולש לפי אורך בסיס

פתיחה

מבקשים מהתלמידים להסתכל במשימת הפתיחה שבמסגרת ולשער עבור איזה סוג משולש מתקבל השטח המקסימלי.

התשובה הצפויה: השטח המקסימלי מתקבל במקרה של משולש שווה-צלעות.

בשלב זה לא מגיבים ומבקשים מהתלמידים לעבוד על משימה 1.

פתרונות והערות

1. א. כשאורך הבסיס 2.5 ס"מ, אורך הגובה לבסיס 2.7 ס"מ והשטח 3.4 סמ"ר.

שאורך הבסיס 3 ס"מ, אורך הגובה לבסיס 2.6 ס"מ והשטח 3.9 סמ"ר.

כשאורך הבסיס 4.24 ס"מ, אורך הגובה לבסיס 2.1 ס"מ והשטח 4.5 סמ"ר.

כשאורך הבסיס 5 ס"מ, אורך הגובה לבסיס 1.7 ס"מ והשטח 4.25 סמ"ר.

ב. אורך הבסיס משתנה בין 0 ס"מ ו- 6 ס"מ. נקודות הקצה הן: (0,0) ו- (6,0).

ג. התלמידים משרטטים סקיצה של גרף משוער המתאר את שטח המשולש כפונקציה של אורך הבסיס.

ד. השטח הגדול ביותר מתקבל כשהמשולש ישר-זווית.

ה. השטח המקסימלי הוא 4.5 סמ"ר.

תשובות צפויות לסעיפים ג, ד, ו- ה: גרף השטח הוא סימטרי, הגרף דומה לפרבולה בעלת נקודת מקסימום, כשהמשולש שווה-צלעות.

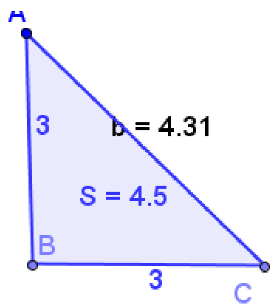
2. פותחים את היישומון **שטח שווה-שוקיים לפי בסיס** באתר, או מקישים על הקישור http://ggbtu.be/mZEVXjkxA . גוררים את קדקודי המשולש הניתנים לגרירה, מוצאים ערכים של שטח המתאימים לאורכי בסיס שונים. (אפשר גם לבדוק את החישובים שנעשו בשאלה הקודמת). הגרירה הרצופה של קדקודי המשולש, מאפשרת לעקוב אחר השתנות השטח באופן רציף ואולי לפסול כבר כאן השערות מוטעות שהועלו בשאלה 1.

בשלב זה רוב התלמידים עדיין משערים שגרף השטח הוא סימטרי. תשובות אלו מתקבלות מאחר והאינטואיציה מובילה להסתכלות על השתנות השטח לפי גודל זווית הראש של המשולש.

משרטטים את הגרף באמצעות המחשב (על-ידי גרירת קדקודי המשולש).

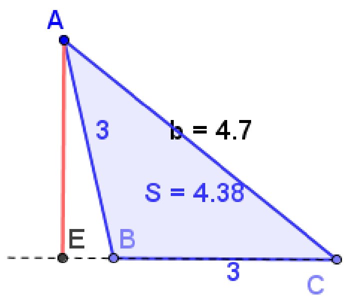
התוצאות בדרך כלל מפתיעות, כי הן מנוגדות להשערות.

תוצאות מפתיעות מעוררות את הצורך בהסבר. חשוב להביא תופעות כאלה כדי להדגיש את תפקידיה של ההוכחה, כמשכנעת וכמסבירה נכונות של טענות.



בודקים ומוצאים שהגרף אינו סימטרי. נקודת המקסימום מתארת משולש ישר-זווית שווה-שוקיים. במקרה זה אורך הבסיס, לפי משפט פיתגורס הוא 4.24 יחידות אורך, והשטח הוא 4.5 יחידות שטח מתאימות.

<u>וכעת להסבר:</u>



הסבר גאומטרי: נוריד גובה מקדקוד A לשוק BC. כעת אפשר לבטא את שטח המשולש בעזרת משתנה אחד AE: שטח המשולש שווה $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot AE$.

השטח הגדול ביותר יתקבל כאשר אורך AE הוא הגדול ביותר.

$AE\le 3$ (כי AE ניצב במשולש ישר-זווית AEB). לכן, שטח משולש ABC יהיה גדול ביותר כאשר הגובה AE , יתלכד עם השוק AB של המשולש. כלומר, כאשר המשולש הוא ישר-זווית ושווה-שוקיים. במקרה זה, השטח המקסימלי הוא $\frac{3\cdot 3}{2}=4.5$

הגרף אינו סימטרי: מחשבים את אורך בסיס המשולש שווה-השוקיים ישר-הזווית לפי משפט פיתגורס: $\sqrt{3^2+3^2}=4.24$. כדי שגרף יהיה סימטרי נקודת המקסימום צריכה להיות באמצע התחום. התחום של הפונקציה הזו הוא מ- 0 ועד ל- 6 ונקודת המקסימום מתקבלת כשאורך הבסיס 4.24 ולא 3.

הייצוג אלגברי לפונקציה S, המתאימה לאורך הבסיס (b) את שטח המשולש הוא:

נסמן: h – אורך הגובה לבסיס b. $h=\sqrt{3^3-(\frac{b}{2})^2}$

ומכאן, שטח המשולש $S=\frac{b\cdot\sqrt{3^3-(\frac{b}{2})^2}}{2}$ ולאחר פישוט: $S=\frac{1}{4}\cdot b\cdot\sqrt{36-b^2}$

אפשר להציב בפונקציה שכתבנו ערכים שונים עבור אורך הבסיס, לבדוק מהו השטח המתקבל ולהשוות עם השטח שמציג היישומון עבור אותו אורך בסיס.

בפרט, כדאי להציב את הערך המתאים לאורך הבסיס במשולש ששטחו מקסימלי ולבדוק את השטח המתקבל.

3. תלמידים שאינם משתמשים ביישומון פותרים את משימה 3. התשובות למשימה זו מופיעות כתשובות למשימה 2.

(בשאלה 3 סעיף ג, כתחליף למחשב, מופיעה סדרת שרטוטים של משולשים עם הגובה לשוק. לפי השרטוטים אפשר להסיק שאורך הגובה הזה הוא לכל היותר 3 ס"מ כאשר הוא מתלכד עם השוק השנייה של המשולש. בכל שאר המקרים נוצר משולש ישר-זווית שהגובה לשוק הוא ניצב והשוק השנייה היא היתר של המשולש הזה, ולכן אורך הגובה קטן או שווה ל- 3 ס"מ.)

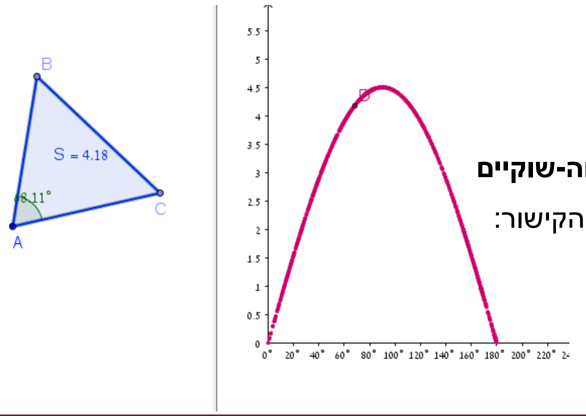
שטח משולש לפי גודל זווית הראש

4. א. גודל זווית הראש משתנה בין 0^0 ל- 180^0.

ב. משרטטים (באופן ידני) את גרף הפונקציה המתארת את שטח המשולש לפי גודל זווית הראש.

כמו במשימה הקודמת, השטח המקסימלי מתקבל כאשר המשולש הוא ישר-זווית, וההסבר לכך ניתן כבר במשימה הקודמת. הפעם הגרף סימטרי, מכיוון שזווית הראש של המשולש בעל השטח המקסימלי היא זווית ישרה (90^0 הוא אמצע תחום ההגדרה של הפונקציה).

בודקים את שרטוט הגרף באמצעות היישומון שבאתר: **שווה-שוקיים לפי זווית הראש** או באמצעות הקשה על הקישור: http://ggbtu.be/mDg3hxsgZ.



שטח משולש לפי אורך הגובה לבסיס

5. משימה זו דומה למשימה הראשונה: הפעם בודקים את השתנות שטח המשולש לפי אורך הגובה לבסיס.

נתון משולש שווה-שוקיים ABC שבו אורך כל שוק 3 ס"מ, ומשורטטים מקרים פרטיים של שטח המשולש לפי אורך הגובה לבסיס.

א. קובעים מהו התחום של הפונקציה: בין 0 ל- 3 יחידות.

ב. מסמנים נקודות המתאימות למשולשים המשורטטים: (2.7 , 3.4) (2.6 , 3.9) (2.12 , 4.5) (1.7 , 4.25).

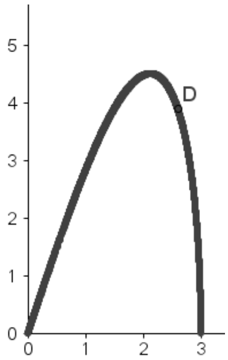
ג. כמו במשימות הקודמות, השטח המקסימלי מתקבל כשהמשולש שווה-השוקיים הוא גם ישר-זווית.

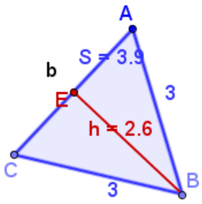
ד. משרטטים סקיצה של גרף משוער המתאר את שטח המשולש כפונקציה של אורך הגובה לבסיס.

ה. הגרף אינו סימטרי מאחר ונקודת המקסימום מתקבלת כשאורך הגובה לבסיס 2.16 ס"מ, ואורך זה אינו אמצע התחום בין 0 ל- 3.

בעקבות ההתנסות, התלמידים צפויים לשרטט סקיצה דומה לסקיצה במשימה 1. עליהם לשים לב שהפעם התחום הוא בין 0 ל- 3. כמו במקרים הקודמים, השטח המקסימלי מתקבל, כאשר המשולש שווה-השוקיים הוא גם ישר-זווית. השטח המקסימלי הוא 4.5 יחידות שטח (כמו במקרה הקודם). לפי משפט פיתגורס, אפשר למצוא את אורך הגובה לבסיס: במקרה זה, 2.16 ס"מ.

ההסבר הגאומטרי זהה להסבר בפעילות הקודמת.





6. לבדיקה פותחים את הישומון **שווה-שוקיים גובה וגרף** שבאתר.

(אפשר גם להקיש על הקישור: http://ggbtu.be/mmFCrKxRo)

אפשר לבקש מהתלמידים לרשום ייצוג אלגברי לפונקציה S המתאימה לאורך הגובה לבסיס (h) את שטח המשולש.

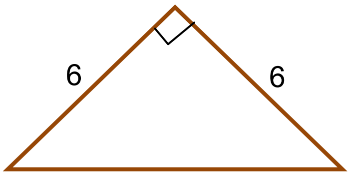
נסמן: b- אורך הבסיס. $\frac{b}{2}=\sqrt{3^2-h^2}$

ומכאן, שטח המשולש $S=\frac{1}{2}b\cdot h=h\cdot\sqrt{3^2-h^2}$

אפשר להציב בפונקציה ערכים שונים עבור אורך הגובה לבסיס, לבדוק מהו השטח המתקבל ולהשוות עם השטח שמציג הישומון עבור אותו אורך של הגובה.

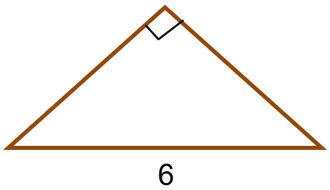
בפרט, כדאי להציב את הערך המתאים לאורך הגובה לבסיס במשולש ששטחו מקסימלי ולבדוק את השטח המתקבל.

שומרים על כושר

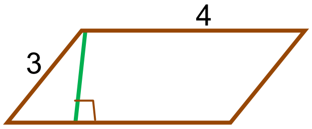


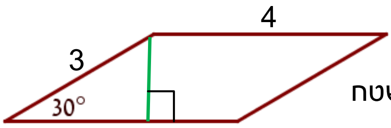
1. א. השטח המקסימלי מתקבל כאשר המשולש שווה-השוקיים הוא גם ישר-זווית. השטח הוא 18 סמ"ר.

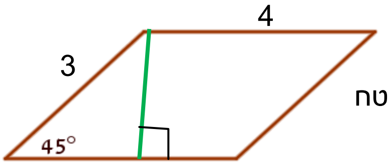
ב. באמצעות משפט פיתגורס: מחשבים את אורך הבסיס של המשולש שווה-השוקיים וישר-הזווית בעל אורך שוק 6 ס"מ: אורך הבסיס 8.48 ס"מ.



2. א. גם כאן השטח המקסימלי מתקבל כאשר המשולש שווה-השוקיים הוא ישר-זווית. אם x מייצג את אורך השוק אורך השוק נקבל $2x^2 = 36$ ואז $x^2 = 18$ ושטח המשולש שווה ל- $0.5x^2$ כלומר, ל- 9 סמ"ר.



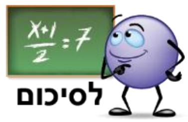




3. א. אורך הגובה של המקבילית לצלע שאורכה 4 ס"מ קטן, או שווה לצלע שאורכה 3 ס"מ. האורך המקסימלי של הגובה הזה מתקבל כאשר הוא מתלכד עם צלע המקבילית כלומר, כשהמקבילית היא מלבן ואז השטח הוא 12 סמ"ר.

ב. במשולש ישר-זווית אורך ניצב מול זווית של 30° שווה למחצית אורך היתר. לכן, אורך הגובה לצלע שאורכה 4 ס"מ, שווה ל- 1.5 ס"מ. שטח המקבילית שווה ל- 6 סמ"ר.

ג. במקרה זה הגובה הוא ניצב במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים שאורך היתר שלו 3 ס"מ. מחישוב אורך הגובה מוצאים שאורכו 2.12 ס"מ, ושטח המקבילית 8.48 סמ"ר.



לסיכום

- באמצעות הישומון הראשון, **שטח משולש שווה-שוקיים לפי בסיס**, חוזרים על ההסבר מדוע השטח המקסימלי מתקבל כאשר המשולש ישר זווית, ומדוע התקבל גרף שאינו סימטרי.
- פעילות 7.2 **משולש שונה צלעות וגרף**, היא פעילות המשך לפעילות זו. שם מופיעות שתי משימות שהראשונה בהן דומה למשימות שבפעילות זו והשנייה, שנראית דומה למשימה השלישית כאן, אבל היא משימה מפתיעה ביותר.