6.5 ההיקף הקטן ביותר

מטרות

- קריאה מודרכת של טקסט מתמטי
- הזדמנות נוספת לעריכת חקירה והוכחת ממצאי החקירה.

אמצעי עזר

היישומון "היקף מינימלי 1" באתר מתמטיקה משולבת (מדור מצוינות רחובות).

http://ggbtu.be/mNnSW4Brb

היישומון "היקף מינימלי 2" באתר מתמטיקה משולבת (מדור מצוינות רחובות).

http://ggbtu.be/mjDBrTADB

פתיחה

פותחים בעזרת הצגת המשולשים שבפתיחה. אוספים השערות לגבי המשולש הירוק שהיקפו קטן ביותר מבלי להגיב. בדרך כלל התלמידים יבחרו במשולש משמאל או מימין.

מסבירים לתלמידים שהמטרה העיקרית ביחידה זו היא להתמודד עם **קריאת טקסט מתמטי** והבנתו. ומציגים את הבעיה המופיעה תחת הכותרת "היקף מינימלי".

פתרונות והערות

הערה כללית: הפעילות דורשת קריאת טקסט מתמטי, לכן רצוי לעבוד בקבוצות או זוגות. אפשר להקדים קריאה עצמית, ואם יש צורך, אחד התלמידים יקרא בפני חבריו. לאחר הקריאה חשוב לקיים שיחה בתוך הקבוצה (2 – 4 תלמידים) על הקטע, ולהבהיר אותו זה לזה.

שלבי הכנה:

- נתינת מידע היסטורי לפי פינת ה"הידעתם?"
- התנסות בחיפוש אחרי תנאי לקבלת משולש חסום שהיקפו מינימלי בעזרת מחשב (משימה 1).
- תכונות השיקוף בישר, **ככלי** להוכחות שבהמשך (הגדרת שיקוף בישר ומשימה 2).

שלב א:

בהנחה שמקום קדקוד אחד של המשולש החסום נקבע, מחפשים דרך למציאת מקומם של שני הקדקודים האחרים. התהליך מתבסס על תכונות השיקוף בישר (משימות 2 ו- 3, ויישום במשימה 4).

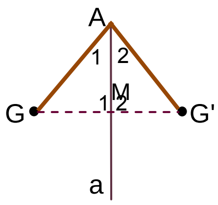
שלב ב:

חיפוש מקום הקדקוד הראשון (משימה 5 – שימוש ביישומון). המשך המעקב אחרי משפט פהֵר , תוך שימוש בתכונות השיקוף בישר (משימה 6). זיהוי עקב הגובה כמקום המתאים לקדקוד (משפט פהר).

היקף מינימלי

1. התלמידים נעזרים ביישומון לחיפוש תנאי לקבלת היקף קטן ביותר. החיפוש מחזק את התחושה שאפשר להקטין את ההיקף על ידי שינוי קדקוד אחד, וכך לעבור מקדקוד אחד לשני עד לשיפור המלא. אין חשיבות לסדר הקדקודים. רצוי לשוחח בזוגות על החיפוש ולנסות לשער מהו המקום המתאים ביותר לקדקודים.

שיקוף בישר



2. מחברים את G עם G' ומסמנים באות, למשל M את חיתוך G'G עם הישר a.

המשולשים ΔAGM ו- $\Delta AG'M$ חופפים כי:

$GM = G'M$ (a הוא ישר השיקוף ולכן אנך אמצעי של G'G)

$\measuredangle M_1 = \measuredangle M_2$ (זוויות ישרות, כי a הוא ישר השיקוף ולכן אנך אמצעי של G'G)

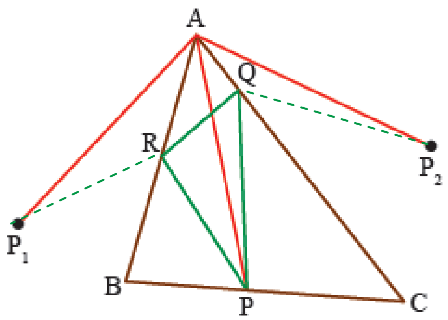
AM צלע משותפת

לכן המשולשים חופפים לפי צ.ז.צ

מהחפיפה נובעים השוויונות: $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ $AG=AG'$

שלב ראשון של מציאת תנאי והוכחה

3. תפקיד משימה 3, למצוא דרך בה קל לקבוע מהו ההיקף הקטן ביותר



עבור נקודה נתונה P על צלע BC של ΔABC

P_1 שיקוף של P ב- AB

P_2 שיקוף של P ב- AC

א. נחבר את R עם P_1 ואת Q עם P_2

- $RP = RP_1$ (כי P_1 שיקוף של P ב- AB)

$QP = QP_2$ (כי P_2 שיקוף של P ב- AC)

(כל נקודה על ישר השיקוף נמצאת במרחק שווה מנקודה נתונה ותמונתה)

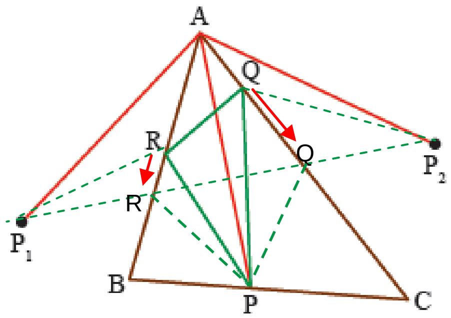
- היקף משולש ΔPQR שווה לסכום הקטעים $P_1R+RQ+QP_2$ (הקו השבור בנוי מ- RQ ומשני קטעים השווים ל- RP ו- PQ)

ב. מקומם של P_1 ו- P_2 נקבע על ידי שיקוף של P בצלעות AB ו- AC בהתאמה, ולכן אינו מושפע על ידי מקומם של R ו- Q.

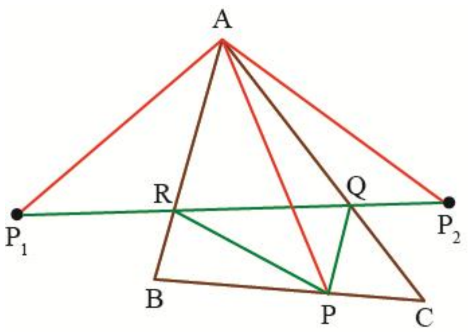
ג. אביטל צדקה, כי הקו הישר הוא הקו הקצר ביותר בין שתי נקודות.

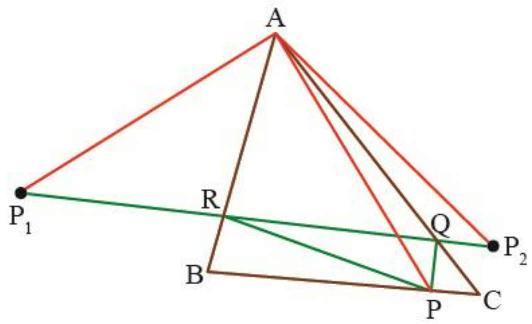
לכן נזיז את R ו- Q על צלעות ΔABC עד ש- R ו- Q יהיו על הישר P_1P_2. נקבל שהסכום $P_1R+RQ+QP_2$ מינימלי עבור הנקודה P בה התחלנו.

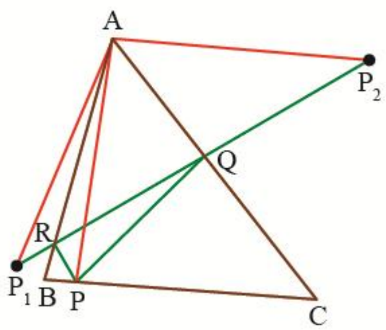
כלומר, המשולש הירוק המקווקו ΔPRQ הוא בעל ההיקף הקטן ביותר עבור מקום הנקודה P בה בחרנו.

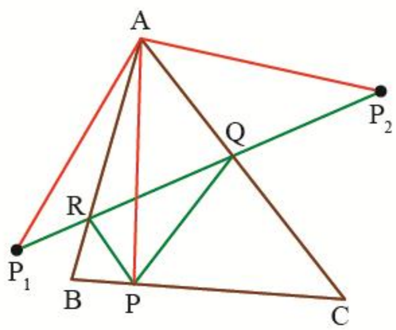


4. מתאמנים במציאת Q ו- R עבור מיקומים נוספים של הנקודה P. בכל שרטוט מחברים P_1 עם P_2 ומקבלים את המיקום המתאים של הנקודות את R ו- Q. המשימה חשובה במיוחד לתלמידים שלא מתנסים ביישומון שבמשימה 5.









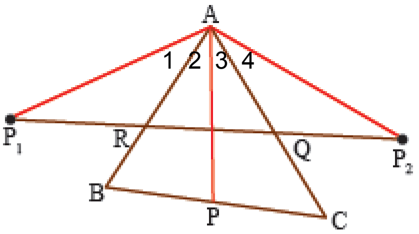
שלב שני

בשלב זה מחפשים דרך לקביעת המקום של הנקודה הראשונה (P).

5. התנסות ב**יישומון** להשפעה של שינוי מקום P על הצלע BC. לכל P מתאימים Q ו- R עבורם ההיקף מינימלי.

למשימת מחשב זו אין משימה חלופית.

6. מציאת המקום של P, כך שהיקף המשולש החסום יהיה מינימלי שקולה למציאת מקום לנקודה P כך שהקטע P_1P_2 יהיה הקטע הקצר ביותר. לשם כך, נבדוק תכונות של המשולש ΔP_1AP_2.



בסעיף א, נראה שלזווית $\measuredangle P_1AP_2$ תמיד אותו גודל.

בסעיף ב, נראה ש- ΔP_1AP_2 משולש שווה-שוקיים.

בסעיף ג, על סמך מסקנות אלה נסיק שכל המשולשים ΔP_1AP_2 המתקבלים כתוצאה משינוי מקום הנקודה P דומים ביניהם.

בסעיף ד, נראה כי אם AP הוא הקטע הקצר ביותר מ- A ל- BC, P היא הנקודה המתאימה.

א. נראה כי: $\measuredangle P_1AP_2=2\measuredangle BAC$

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ (כי P_1 היא שיקוף של P בצלע AB)

$\measuredangle A_3 = \measuredangle A_4$ (כי P_2 היא שיקוף של P בצלע AC)

לכן $\measuredangle P_1AP_2 = 2\measuredangle BAC$ כלומר $\measuredangle P_1AP_2$ תלויה רק בזווית $\measuredangle BAC$

ב. נראה שהמשולש $\Delta \mathbf{P_1AP_2}$ שווה שוקיים:

$AP_1 = AP_2$ (P_1 שיקוף של P בצלע AB ו- P_2 שיקוף של P בצלע AC לכן שניהם שווים ל-AP).

קבלנו שכל משולש **ΔP_1AP_2 הוא משולש שווה שוקיים.**

ג. לפי סעיפים א ו- ב קבלנו **משולשים שווי השוקיים** שיש להם אותה **זווית ראש**. לכן, כל המשולשים האלו דומים (אם למשולשים שווי שוקיים אותן זוויות ראש, כל הזוויות שלהם שוות בהתאמה)

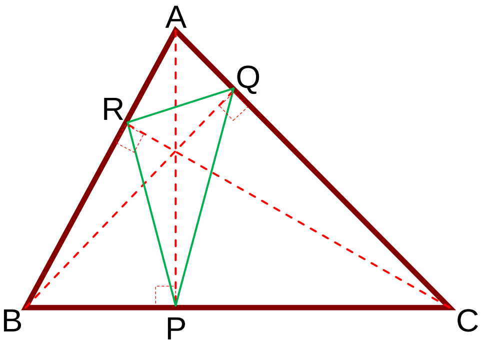
ד. כדי שהיקף המשולש החסום יהיה מינימלי הקטע P_1P_2 צריך להיות הקטן ביותר.

קטע זה הוא בסיס במשולש שווה-השוקיים.

הבסיס במשולש שווה-שוקיים P_1AP_2 יהיה מינימלי, אם השוק AP_1 תהיה מינימלית (כי המשולשים דומים) - כלומר אם הקטע AP יהיה מינימלי (כי השוק AP_1 שווה ל- AP).

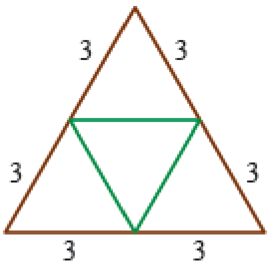
הקטע הקצר ביותר מקדקוד המשולש לצלע ממול הוא הגובה, ולכן P היא **נקודת החיתוך של הגובה עם הצלע ממול.**

7. מעבירים גבהים ומחברים את העקבות שלהם.



הערה: אפשר כמובן למצוא תחילה את P ולהמשיך בעזרת שיקופים. אך דרך זו לא יעילה לבנייה. הייתה לה חשיבות בבניית ההוכחה.

8. חוזרים למשימת הפתיחה.



א. ראינו שקדקודי המשולש החסום צריכים להיות בעקבי הגבהים.
הגובה במשולש שווה-צלעות הוא גם התיכון. לכן חיבור אמצעי הצלעות יתן את המשולש שהיקפו קטן ביותר.
(המשולש השמאלי שבמשימת הפתיחה)

ב. אורך צלע המשולש הירוק שווה ל- 3 ס"מ (שלושת המשולשים שמסביב [illegible] ם
שזווית הראש בהם °60, ולכן הם שווי-צלעות)
מכאן נסיק כי ההיקף המינימלי של המשולש החסום במשולש זה הוא 9 ס"מ.

1. א. בכל שרטוט המרובע החסום בריבוע הוא ריבוע:
צלעות המרובע החסום הם היתר בארבעה משולשים ישרי-זווית חופפים (לפי צ.ז.צ. כי המשולשים ישרי-זווית השווים בשני הניצבים).
זווית המרובע ישרה (זווית המרובע משלימה את שתי הזוויות החדות של משולש ישר-זווית לזווית שטוחה)

ב. i אורך כל צלע $\sqrt{9+9}$ כלומר $3\sqrt{2}$ או 4.24 ס"מ
היקף הריבוע: $4\sqrt{18}$ או $12\sqrt{2}$ או 16.96 ס"מ
שטח הריבוע: 18 סמ"ר $\left((\sqrt{18})^2\right)$

ii אורך כל צלע $\sqrt{16+4}$ כלומר $\sqrt{20}$ או 4.47 ס"מ

היקף הריבוע: 17.88 ס"מ.

שטח הריבוע: 20 סמ"ר

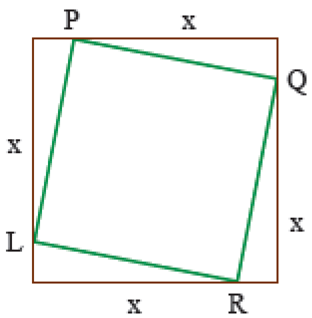
iii אורך כל צלע $\sqrt{25+1}$ כלומר $\sqrt{26}$ או 5.1 ס"מ

היקף הריבוע: 20.4 ס"מ.

שטח הריבוע: 26 סמ"ר

הערה: את השטח אפשר למצוא על-ידי העלאה בריבוע של צלע הריבוע הפנימי, או הפחתת שטחי ארבעת המשולשים ישרי- הזווית משטח הריבוע המקורי.

ג-ד. לריבוע i השטח וההיקף הקטנים ביותר.



2. שטח הריבוע החסום בסמ"ר:

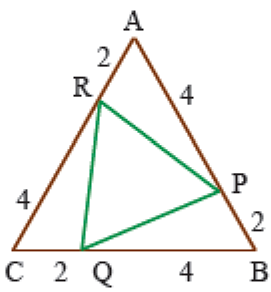
$36 - 4\cdot½\cdot x(6 - x) = 2x^2-\!-12x+36$

נסתכל על הפונקציה: $y = 2x^2-\!-12x+36$

נקודת המינימום שלה היא: (3,18)

לכן שטח הריבוע החסום המינימלי הוא 18 סמ"ר, והוא מתקבל עבור $x = 3$

למסיימים



1. נתון משולש שווה צלעות ABC∆ .

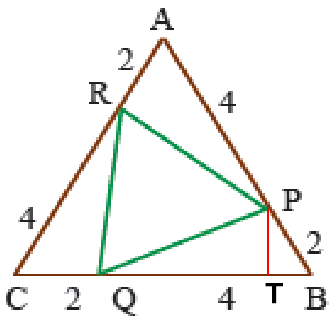
א. הסבירו מדוע PQR∆ הוא משולש שווה-צלעות.

ב. חשבו את אורך הצלע של PQR∆ ואת היקפו.

(הצעה: שרטטו וחשבו את אורך הגובה מנקודה P לצלע BQ)

ג. בכמה גדול היקף משולש זה מהיקף המשולש המינימלי שמצאת במשימה 8.

תשובות אפשריות



א.המשולש הירוק שווה-צלעות, כי הצלעות שלו הן צלעות מתאימות במשולשים חופפים.

המשולשים חופפים כי בכולם יש צלע באורך 2 ס"מ, צלע באורך 4 ס"מ, והזווית ביניהן $60°$.

ב.אורך הצלע של המשולש הירוק:

נעביר גובה PT

אורך TB הוא 1 ס"מ (הוא ניצב במשולש ישר-זווית, מול זווית בת $30°$)

אורך PT הוא $\sqrt{3}$ ס"מ ($\sqrt{4-1}$)

אורך QT הוא 3 ס"מ (1 – 4)

לכן אורך PQ הוא 3.46 ס"מ ($\sqrt{9+3}$)

ההיקף: 10.38 ס"מ (3·3.46)

ג. שהיקף משולש זה גדול ב- 1.38 ס"מ מן ההיקף של המשולש בעל השטח המינימלי.

לסיכום

יחידה זו מזמנת התנסות בקריאת טקסט מתמטי. בסיום היחידה כדאי לשוחח על התחושות בעקבות הקריאה.

נשאל:

מה היה קשה בקריאת הטקסט המתמטי?

מה היה מפתיע?

מדוע לדעתם נתנו להם יחידה זו? מה מפיקים ממנה?

איך עבדו (כל אחד לבד, בזוגות בקבוצות)?