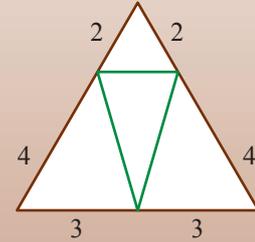
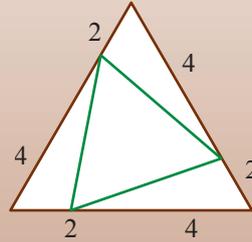
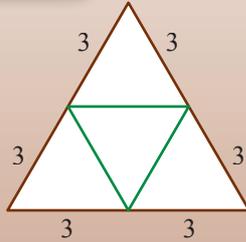


6.5 ההיקף הקטן ביותר



בשרטוט שלושה משולשים שווים-צלעות שאורך צלעותיהם 6 ס"מ. בתוך כל משולש חסום משולש (צבוע ירוק).

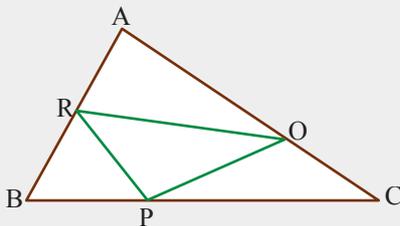


שערו באיזה מהשרטוטים היקף המשולש החסום הוא הקטן ביותר.

היקף מינימלי



נתון משולש ABC חד-זוויות. רוצים לקבוע נקודות P , Q , R על צלעות המשולש ABC , כך שהיקף המשולש PQR יהיה קטן ככל האפשר. בעיה זו הוצעה כבר במאה ה-18 ובאה על פתרונה במאה ה-19. כלומר, מתמטיקאים מצאו תנאי המבטיח שהסכום $RP+QR+PQ$ יהיה קטן ככל האפשר, אבל ההוכחות שהם מצאו היו מסובכות מדי.



רק במאה ה-20 מצא המתמטיקאי ההונגרי ל. פֶּהֶר (L. Fejér) הוכחה פשוטה ואלגנטית. ויותר מכך, במהלך ההוכחה גם מתגלה התנאי הנדרש.

בפעילות זו תחקרו מהו התנאי ותעקבו אחר ההוכחה של פֶּהֶר.

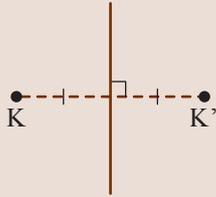


1. שערו באיזה תנאי היקף המשולש PQR יהיה קטן ביותר. תוכלו להיעזר ביישומון היקף מינימלי 1 באתר מתמטיקה משולבת, מדור מצוינות רחובות, או הקישו על הקישור:

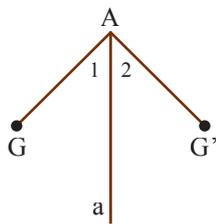
<http://ggbtu.be/mNnSW4Brb>

כדי לעקוב האחר ההוכחה של פְּהָר, צריך להכיר את המושג שיקוף בישר.

שיקוף בישר



שיקוף בישר: נקודה K' היא שיקוף של נקודה K בישר, אם הישר הוא אנך אמצעי של הקטע המחבר את K עם K' .



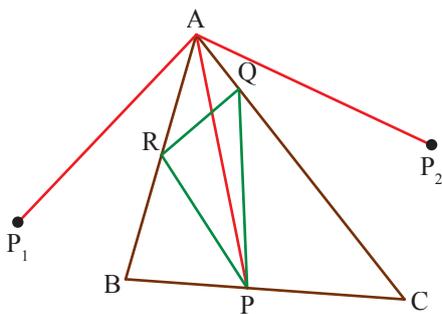
2. נתון: שיקוף של G בישר a (על ישר השיקוף).

$$AG = AG' \quad \text{חברו את } G'G \text{ והוכיחו:}$$

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$$

שלב ראשון של מציאת תנאי והוכחה

נתחיל מסימון נקודות כלשהן P, Q, R על צלעות המשולש ABC . נחפש מהו המיקום המתאים של הנקודות Q ו- R עבור נקודה P שנבחרה על BC , כך שהיקף המשולש PQR יהיה מינימלי.



3. כדי למצוא מה המיקום המתאים של Q, R ו- P עבור הנקודה P שבחרנו נשקף את AP בצלע AB ובצלע AC . (ראו שרטוט.)

א. חברו את P_1R ואת P_2Q והוכיחו:

$$P_2Q = PQ \quad , \quad P_1R = PR \quad \bullet$$

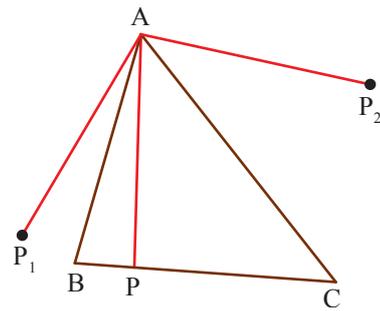
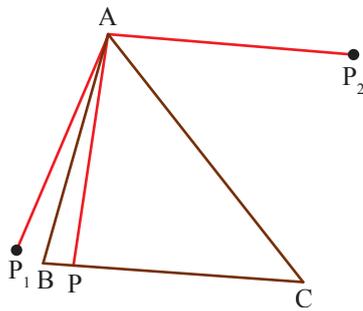
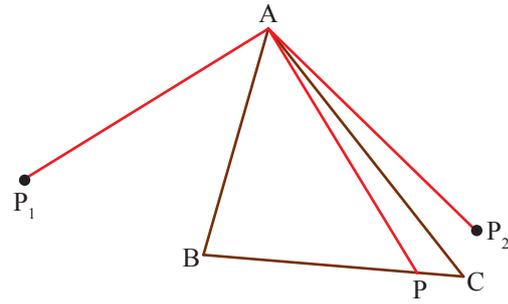
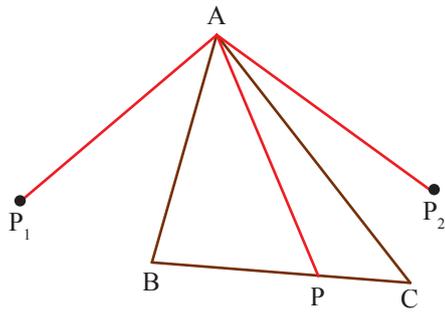
$$\bullet \quad \text{היקף משולש } PQR \text{ שווה ל- } P_1R + RQ + QP_2$$

ב. מקומם של P_1 ושל P_2 אינו תלוי במיקומם של Q ושל R . הסבירו.

ג. **אביטל** אמרה: סכום אורכי הקטעים $P_1R + RQ + QP_2$ יהיה קטן ביותר כאשר הנקודות P_1, R, Q, P_2 תמצאנה על ישר אחד. הסבירו.

עד כה ראינו כי אם נדע היכן למקם את P , מקומן של Q ו- R צריך להיקבע כך שהנקודות P_1, R, Q, P_2 נמצאות על ישר אחד.

4. בכל שרטוט מצאו וסמנו את Q ו-R המתאימים למסקנה שמצאנו. חברו את צלעות משולש PQR.

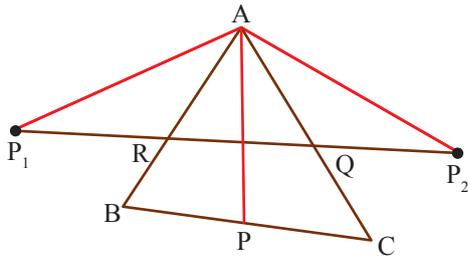


שלב שני

עדיין לא מצאנו היכן למקם את P על BC, כדי שהיקף המשולש יהיה קטן ביותר. כדי לשער תוכלו להשתמש ביישומון במשימה 5 או בשרטוטים שבמשימה 4.
 כדי להראות היכן צריכה הנקודה P להימצא, נמשיך לעקוב אחר ההוכחה של פֶּהֶר במשימה 6.



5. כדי לשער היכן למקם את P תוכלו להשתמש ביישומון היקף מינימלי 2 באתר מתמטיקה משולבת, מדור מצוינות רחובות, או להקיש על הקישור: <http://ggbtu.be/mjDBrTADB>.
 ביישומון זה תוכלו להזיז את P על BC ולבדוק מתי היקף משולש PQR מינימלי.



6. נמצא את מקומה של P באמצעות ההוכחה של פְּהָר: א. הסבירו מדוע $\angle P_1AP_2 = 2\angle BAC$ בלי קשר למקומה של P על BC. ב. מכאן שמשולש P_1AP_2 הוא משולש שווה-שוקיים שזווית הראש שלו נתונה (כפולה מ- $\angle BAC$). ג. \Leftarrow כל המשולשים AP_1P_2 הם משולשים דומים. נמקו. (ראו שרטוטים במשימה 4).

- ד. \Leftarrow הצלעות של כל המשולשים AP_1P_2 פרופורציוניות. לכן אורך הבסיס של משולש AP_1P_2 יהיה קטן ביותר כאשר אורך השוק של המשולש הזה (AP_1) יהיה קטן ביותר. אבל $AP_1 = AP$ לכן יש לקבוע את P על BC כך שהקטע AP יהיה קטן ככל האפשר. - מהו הקטע הקצר ביותר מ-A לצלע BC?

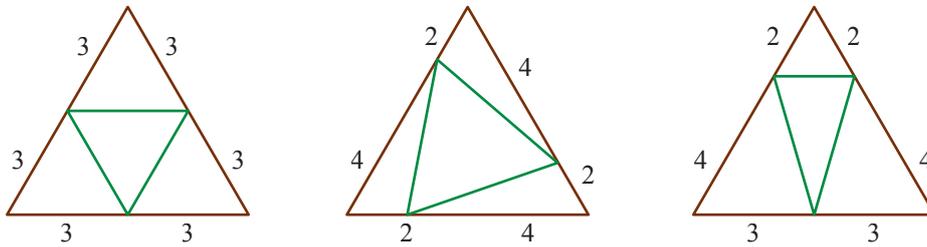
הראינו שכדי שהיקף המשולש PQR יהיה מינימלי, AP צריך להיות גובה ל-BC במשולש ABC. בדרך דומה אפשר להוכיח שכדי לקבל היקף מינימלי, הנקודה R על AB צריכה להיות עקב הגובה מ-C ל-AB, והנקודה Q על AC צריכה להיות עקב הגובה מ-B ל-AC.

המשפט: כדי שהיקף משולש PQR יהיה הקטן ביותר האפשרי, שלוש הנקודות P, Q, R צריכות להיות עקבי הגבהים מקדקודי המשולש ABC לצלעותיו.

7. שרטטו משולש שונה-צלעות חד-זוויות. שרטטו בו את המשולש החסום שהיקפו קטן ביותר.

8. נחזור למשימת הפתיחה: בכל שרטוט משולש שווה-צלעות שאורך כל צלע שלו 6 ס"מ. בתוך כל משולש חסום משולש.

א. באיזה משלושת המשולשים היקף המשולש הצבוע ירוק קטן ביותר? נמקו.

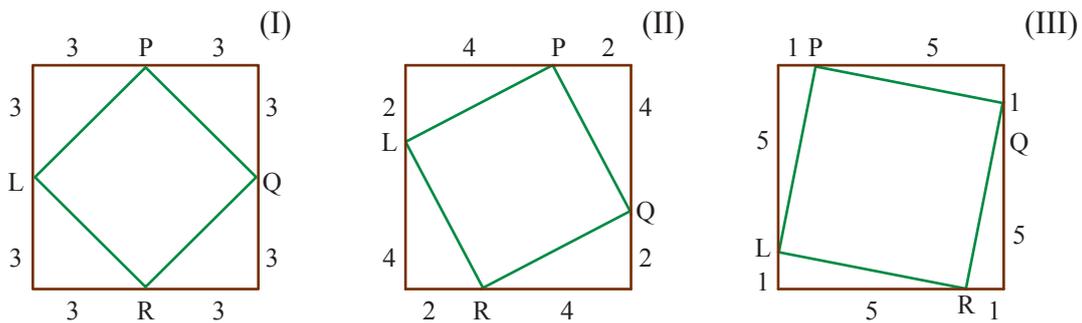


ב. מהו ההיקף המינימלי של משולש החסום במשולש שווה-הצלעות שאורך הצלע שלו 6 ס"מ? נמקו.



שומרים על כושר

1. בכל סעיף נתון ריבוע שאורך כל צלע בו 6 ס"מ.

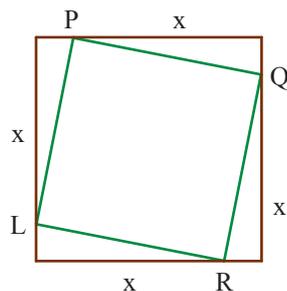


בתוך כל ריבוע חסום מרובע. מקום הקדקודים P, Q, R, L על צלעות הריבוע נתון.
א. הוכיחו שהמרובע PQRL הוא ריבוע.

ב. חשבו את ההיקף והשטח של הריבוע PQRL (צבוע ירוק).

ג. לאיזה מהריבועים הצבועים ירוק היקף קטן ביותר?

ד. לאיזה מהריבועים הצבועים ירוק שטח קטן ביותר?



2. אורך צלע הריבוע הצבוע בחום הוא 6 ס"מ.

בטאו באמצעות x את שטח הריבוע PQRL (צבוע ירוק).

מצאו עבור איזה ערך של x מתקבל שטח קטן ביותר. הסבירו.