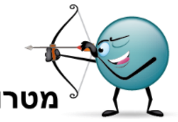
6.3 יחסי שטחים



מטרות

- שימוש ביחסים בין שטחים כדרך להוכחת משפטים הקשורים ליחסים בין צלעות
- להבין שגבהים שווים יוצרים שוויון של היחס בין הצלעות ליחס בין השטחים

אמצעי עזר

משולש גדול כמו המשולש במשימת הפתיחה להצגה על הלוח.

טרפז גדול כמו הטרפז במשימה 1 להצגה על הלוח.

דף לכל קבוצה של ארבעה תלמידים, בו יופיע השרטוט ממשימה 5 שש פעמים.

פתיחה

פותחים בעזרת הצגת המשולש שבפתיחה. אוספים השערות מבלי להגיב.

שואלים: היחס בין שטחי שני ריבועים הוא 9:25. מהו היחס בין צלעות הריבועים? הסבירו.
האם היחס בין שטחי משולשים שווי צלעות שווה ליחס בין הצלעות שלהם?
היחס בין שטחי שני משולשים שווי-שוקיים שווה ליחס בין בסיסי המשולשים. הייתכן? הסבירו.

בהמשך נשתמש ביחסים בין שטחים כדי להוכיח יחסים בין קטעים.

לדוגמה: בעזרת יחסים בין שטחי משולשים נמצא פי כמה גדול אורך הקטע BM מאורך הקטע DM (בשרטוט שבפתיחה). כלומר, מהו היחס בין חלקי התיכון הנוצרים על-ידי נקודת החיתוך בין התיכונים במשולש.

פתרונות והערות

משימה 1מציגה מקרה פשוט, בו בשל שוויון הגבהים, היחס בין שטחי המשולשים שווה ליחס הצלעות.

משימה 2 דרושה לכיתה שלא עסקה לאחרונה בתכונות של חוצה-זווית.

במהלך היחידה מוכיחים שני משפטים מרכזיים:

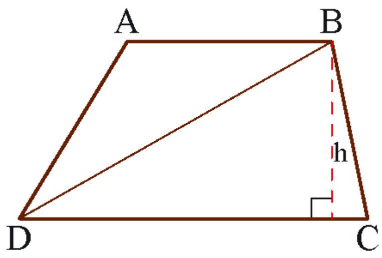
- **חוצה-הזווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הצלעות הכולאות את הזווית.**

  במשפט זה עוסקים במשימות 3 ו- 4. משימה 3 היא חישוב במקרה פרטי, כהכנה להוכחה במשימה 4.
- **נקודת הפגישה של שני תיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 2:1**

  משפט זה מוכח במשימה 4. משימות 5 ו- 6 הן מסקנות ממנו.

.1 האלכסון DB מחלק את הטרפז לשני משולשים.
גובה הטרפז h הוא גם גובה בכל אחד משני המשולשים.
לכן:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot AB}{\frac{1}{2}h \cdot CD} = \frac{AB}{CD}$$



חוצה-זווית במשולש

.2 כל נקודה על חוצה הזווית נמצאת במרחק שווה משוקי הזווית.

ההוכחה נובעת מחפיפת המשולשים Δ ABD ו- ΔACD:

קטע חוצה הזווית הוא **צלע משותפת**.

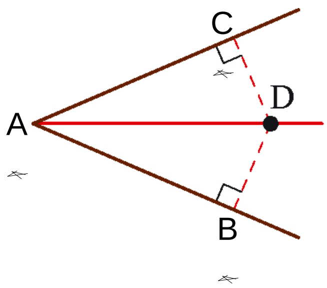
האנכים יוצרים **זוויות ישרות** ולכן שווה.

חוצה הזווית יוצר זוג **זוויות שווה**,

לכן כל הזוויות בשני המשולשים שווה.

המשולשים ΔABD ו- ΔACD חופפים (ז.צ.ז).

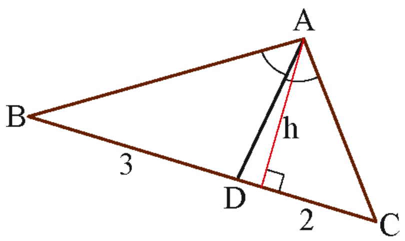
מהחפיפה מתקבל שוויון המרחקים.



.3 א. הגובה h הוא הגובה מ- A במשולשים: ΔABD ו-ΔACD

לכן:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot 3}{\frac{1}{2}h \cdot 2} = \frac{3}{2}$$



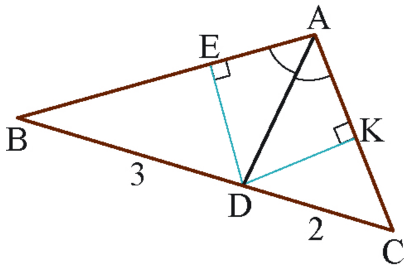
ב. DE ו- DK הם אנכים מ- D ל- AB ו- AC בהתאמה.

DE = DK המרחקים משוקי הזווית שווים

נסמן: DE = DK = d

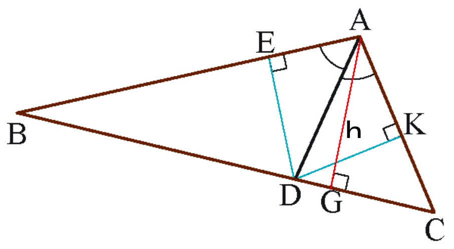
לכן:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}d \cdot AB}{\frac{1}{2}d \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$$



ג. $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$

.4 הגובה h משותף <= $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}h\cdot BD}{\frac{1}{2}h\cdot CD}=\frac{BD}{CD}$

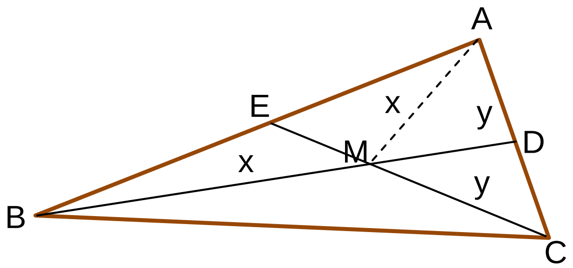


$DE=DK=d$ <= $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}d\cdot AB}{\frac{1}{2}d\cdot AC}=\frac{AB}{AC}$

לכן: $\frac{BD}{CD}=\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{AB}{AC}$

כלומר: חוצה הזווית מחלק את הצלע מול הזווית, ביחס שבין הצלעות הכולאות את הזווית.

תיכונים במשולש



.5 א. ME תיכון במשולש AMB

בשני המשולשים לצלעות שוות יש גובה משותף.

לכן: $S_{\Delta BME}=S_{\Delta AME}=x$

MD תיכון במשולש AMC

לשני המשולשים צלעות שוות וגובה משותף.

לכן: $S_{\Delta CMD}=S_{\Delta AMD}=y$

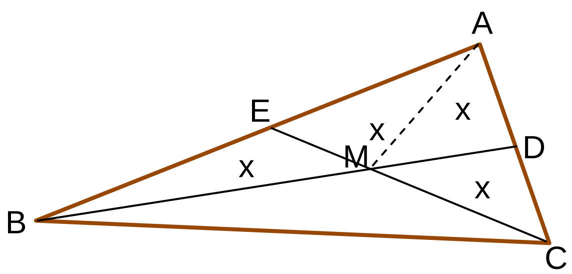
ב. $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$ כי $AD=\frac{1}{2}AC$ והגובה משותף

$S_{\Delta ACE}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$ כי $AE=\frac{1}{2}AB$ והגובה משותף

לכן: $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACE}$

ג. $S_{\Delta ABD}=2x+y$, $S_{\Delta ACE}=x+2y$ לכן: $2x+y=x+2y$ <= $x=y$

ד. על סמך הסעיפים הקודמים:



$S_{\Delta ADM}=x$, $S_{\Delta ABM}=2x$

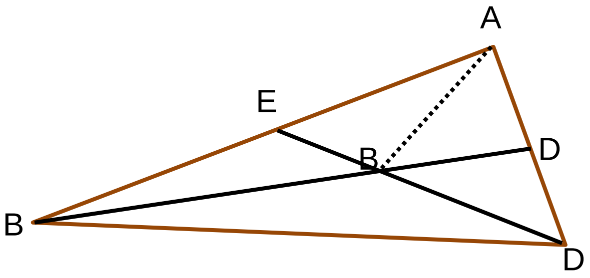
לכן: $\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ADM}}=\frac{2}{1}$

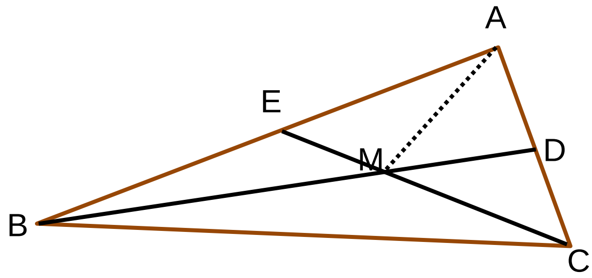
ה. לשני המשולשים ΔABM ו- ΔADM אותו גובה, ולכן יחסי השטחים שלהם שווים ליחסי הצלעות.

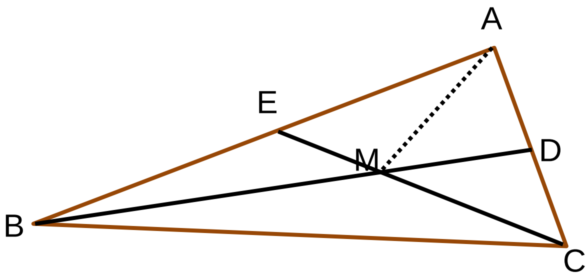
כלומר: $\frac{BM}{MD}=\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ADM}}=\frac{2}{1}$

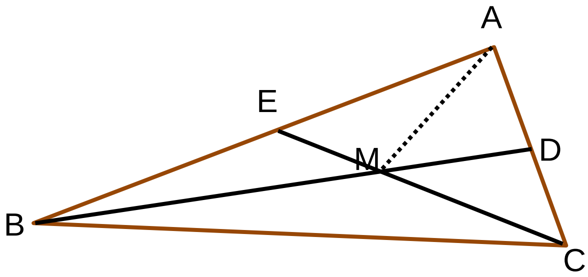
הערה: רצוי להקדים להוכחה, חלוקת דף אחד לכל קבוצה, בו מופיע המשולש שש פעמים.

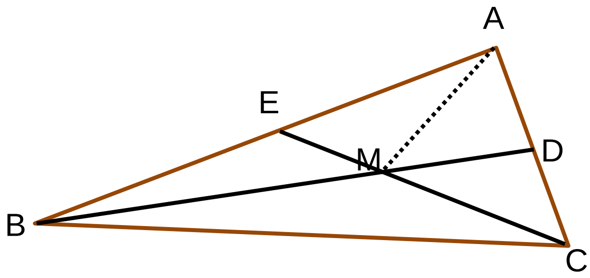
נבקש מקבוצות של תלמידים, תוך דיון בקבוצה, לצבוע מספר רב של זוגות משולשים שווי שטח.
(הצביעה באותו משולש או בשני משולשים לפי הצורך. מזהים משולשים השווים בשטחם זה לזה,
הן משולשים **בודדים** והן משולשים ה**מורכבים** מכמה משולשים.)

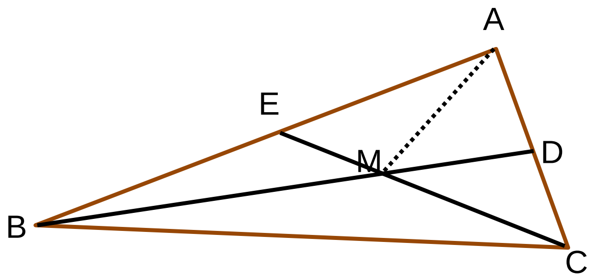








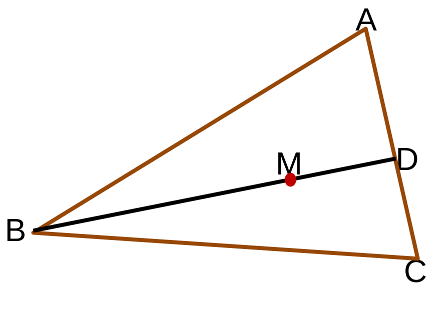




6. שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

הוכחה: M נקודה על התיכון BD במשולש ABC

כך ש- BM:MD = 2:1

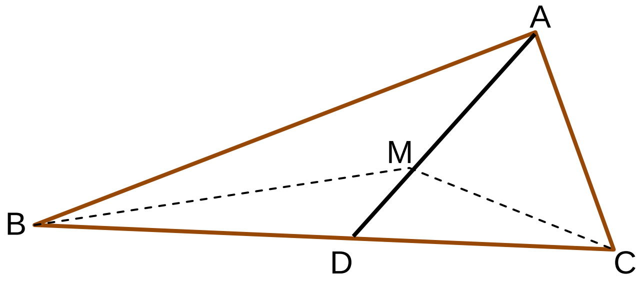


התיכון מ- A ל- BC מחלק את BD ביחס של 2:1 ולכן חייב לעבור דרך M.

התיכון מ- C ל- BA מחלק את BD ביחס של 2:1 ולכן חייב לעבור דרך M.

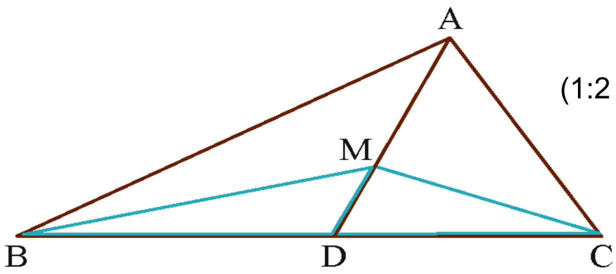
לכן שלושת התיכונים עוברים דרך M.

.7 AD תיכון לצלע BC במשולש ABC
M נקודת הפגישה של התיכונים במשולש.



נוכיח כי: $\frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{1}{3}$

נוכיח תחילה כי: $\frac{S_{\Delta BMD}}{S_{\Delta BAD}} = \frac{1}{3}$



לשני המשולשים אותו גובה מקדקוד B.

$DM = \frac{1}{3}AD$ (כי נקודה M מחלקת את התיכון ביחס של 1:2)

לכן היחס בין השטחים הוא: $\frac{S_{\Delta BMD}}{S_{\Delta BAD}} = \frac{1}{3}$

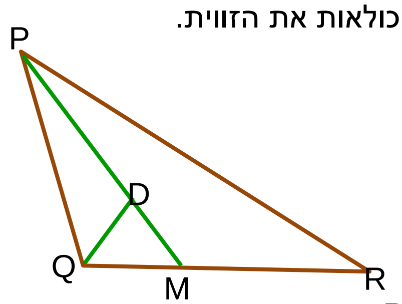
באותה דרך מראים: $\frac{S_{\Delta DMC}}{S_{\Delta DAC}} = \frac{1}{3}$

נחבר את שטחי שני המשולשים שהיקפם — ואת שטחי שני המשולשים שהיקפם —

נקבל: $\frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{1}{3}$

שומרים על כושר

1. נשתמש מספר פעמים במשפט:
חוצה-זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הצלעות הכולאות את הזווית.
נתחיל במשולש QPM ואחר-כך במשולש QPR.

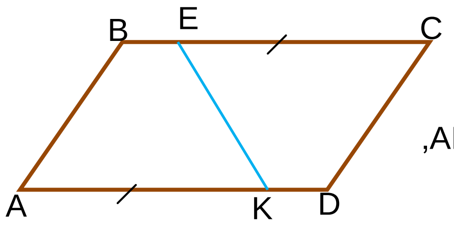


$\frac{4}{QM} = \frac{PQ}{QM} = \frac{PD}{DM}$ כי QD הוא חוצה-זווית במשולש QPM

$\frac{4}{6} = \frac{PQ}{PR} = \frac{QM}{MR}$ כי PM הוא חוצה- זווית במשולש QPR

מכאן: $\frac{QM}{3} = \frac{4}{6}$ או: $QM = \frac{4}{6} \cdot 3 = 2$ ס"מ כלומר: $\frac{PD}{DM} = \frac{4}{2} = 2$

2. א. אם $AK = EC$ הקטע, EK מחלק את המקבילית

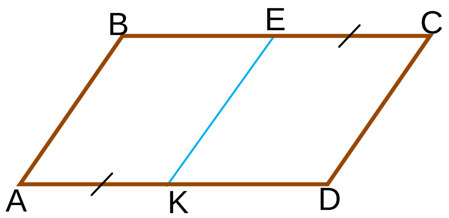


לשני טרפזים שווי שטח: $S_{ABEK} = S_{CDKE}$

כי לשני הטרפזים אותו גובה - הגובה במקבילית לצלע AD,

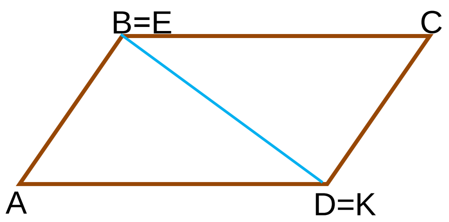
ואורכי שני זוגות הבסיסים שווים זה לזה בהתאמה.

(הערה: שני הטרפזים גם חופפים זה לזה, כי הם שווים בכל הצלעות ובכל הזוויות בהתאמה)



אם הנקודה E היא אמצע BC, מתקבלות שתי

מקביליות שוות שטח: $S_{ABEK} = S_{CDKE}$

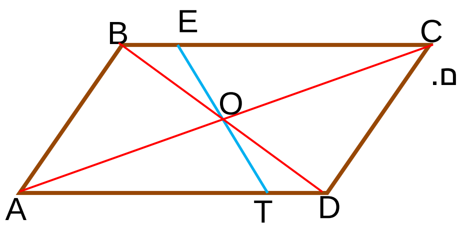


אם הנקודה E היא אחד מקדקודי המקבילית הקטע

EK הוא אלכסון במקבילית, והמשולשים שווי שטח.

ב. כל קטע ET שמחבר נקודות על הצלעות המקבילות, ועובר דרך נקודת החיתוך של אלכסוני המקבילית O, מחלק את המקבילית לשני מרובעים שווי שטח.

נשתמש בתכונות:



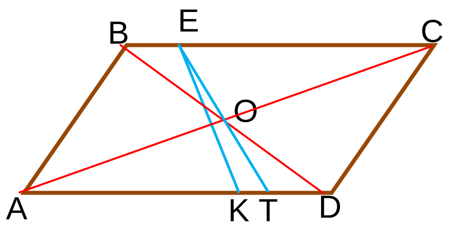
- אלכסון במקבילית מחלק אותה לשני משולשים חופפים.
- האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.

מכאן: $S_{ABD} = S_{CDB}$

כמו כן: $S_{BEO} = S_{DTO}$ כי המשולשים חופפים לפי ז.צ.ז. (OD=BO , וכל הזוויות שוות)

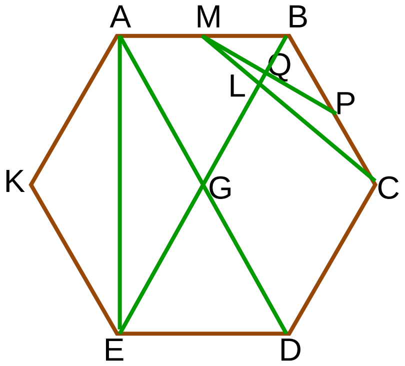
מכאן: $S_{ABET} = S_{CDTE}$

כל אחד מהקטעים שמחלקים את המקבילית לשני מרובעים שווי שטח, עובר דרך נקודת הפגישה של האלכסונים.



(אחרת, היינו מקבלים שני קטעים שונים EK ו- ET

שכל אחד מחלק את המקבילית לשני שטחים שווים)



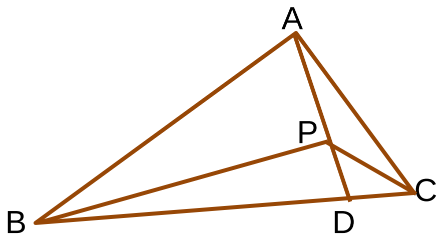
3. יחסי הקטעים במשושה המשוכלל:

א. $\frac{MQ}{QP}=1$ BE הוא ציר סימטריה של המשושה

ב. $\frac{ML}{LC}=\frac{1}{2}$ CM ו- BG תיכונים ב- ΔABC

ג. $\frac{ED}{AD}=\frac{1}{2}$ צלע המשושה שווה למרחק של מרכז המשושה מכל אחד מהקדקודים

ד. $\frac{GD}{AB}=1$ קווי הסימטריה של המשושה חוצים זה את זה ו- ΔABG שווה צלעות.



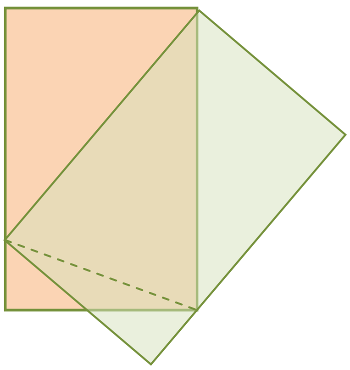
4. קטע AD מחלק את ΔABC לשני משולשים להם גובה משותף לצלעות BD ו- CD.

לכן: $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{BD}{CD}$

קטע AD מחלק את ΔPBC לשני משולשים להם גובה משותף לצלעות BD ו- CD.

לכן: $\frac{S_{\Delta PBD}}{S_{\Delta PCD}}=\frac{BD}{CD}$

$S_{APB}=S_{ABD}-S_{PBD}$, $S_{APC}=S_{ACD}-S_{PCD}$ לכן: $\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}=\frac{BD}{CD}$



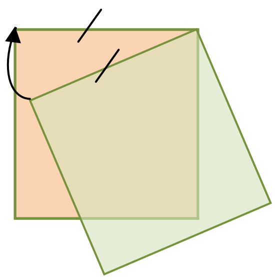
דף מלבני מונח על דף אחר חופף כבשרטוט.

כדי לקבוע האם החלק הגלוי או החלק המכוסה של הדף התחתון בעל שטח גדול יותר, נעביר קו עזר (הקו המרוסק).

קו העזר יוצר משולש שיש לו צלע משותפת עם המלבן והקדקוד הנוסף על הצלע ממול. שטחו של משולש כזה שווה לחצי שטח המלבן.

מכיוון שהשטח המכוסה מכיל חלק נוסף למשולש זה, השטח המכוסה גדול ממחצית המלבן.

מכאן שהשטח המכוסה גדול יותר.

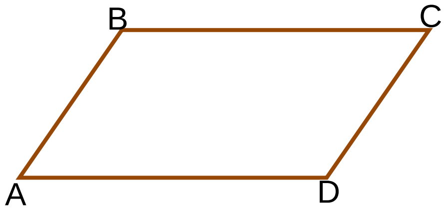


דיון נוסף: מה יקרה אם הדף יהיה ריבוע?

תשובה: הדף העליון יכסה את הדף התחתון, כי לא יתכן משולש ישר זווית בו היתר שווה לניצב.

למסיימים

1. נתונה מקבילית ABCD.

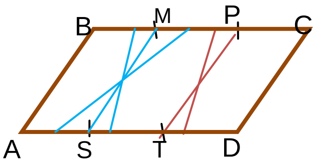


א. שרטטו קטע EK (E נקודה על BC ו- K נקודה על AD) שיחלק את המקבילית לשני חלקים שיחס השטחים שלהם הוא 1:2

ב. שרטטו שתי אפשרויות נוספות.

ג. דרך איזו נקודה עובר כל אחד מהקטעים EK המקיימים את הדרישה.

תשובות אפשריות



1. א-ב. כל אחד מהקטעים המסומנים מחלק את המקבילית לשטחים שהיחס ביניהם 1:2. כיוון שהנקודות M ו- P מחלקות את הצלע BC לשלושה חלקים שווים: BM=MP=PC, והנקודות S ו- T מחלקות את הצלע D לשלושה חלקים שווים: AS=ST=TD .

ג. כל אחד מהקטעים עובר דרך נקודת החיתוך של אלכסוני המקביליתABPT או דרך נקודת החיתוך של אלכסוני המקבילית SMCD.

לסיכום

- מה המיוחד בשוויון היחסים ביחידה זו?

  (אם קיים שוויון של הגבהים, יחסי השטחים שווים ליחסי צלעות.)

- לְמה השתמשנו בשוויון היחסים בין צלעות לשטחים?

  (עשינו שימוש להוכחת השוויון בין יחסי צלעות הכולאות את הזווית ליחסי הקטעים שיוצר חוצה-הזווית על הצלע ממול. כמו כן השתמשנו להוכחת המשפט שנקודת הפגישה של התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 2:1)

- שימו לב שבמהלך פעילות זו עסקנו בקשר בין שטחים לאורכים בהקשר של יחס. בהמשך נשתמש לפעמים בקשר בין שטחים ואורכי קטעים גם בהקשרים אחרים.