6.2 מספר תנאים לחפיפה

מטרות

- התלמידים יודעים שלצורך חפיפה דרושים לפחות שלושה נתונים, אך מאידך לא תמיד שלושה נתונים, ארבעה או אפילו חמישה, מספיקים לקיום חפיפה.
- חיזוק נוסף של המושג: "שווים בהתאמה", בהקשר לחפיפת משולשים.
- הפנמה של הצורך בדיוק בניסוחים בגיאומטריה

אמצעי עזר

פיסות דפי פרגמנט להעתקת משולש.

היישומון "מארבעה לחמישה גדלים שווים" באתר מתמטיקה משולבת, מדור מצויינות רחובות, או לפי הקישור: http://ggbtu.be/mZw1czvSK

פתיחה

מציגים את המשולשים ממשימת הפתיחה. (רצוי על לוח חכם או הצמדה ללוח של המשולש הגדול על נייר והשני על שקף. שואלים: האם המשולשים נראים לכם חופפים? האם יש לשני המשולשים גדלים שווים? כמה? איך נבדוק? מבקשים להעתיק את המשולש הקטן על דף פרגמנט ולחפש גדלים שווים למשולש הגדול. רושמים את הגדלים השווים, תוך הדגמת השוויון על-ידי הנחה של חלקים מהמשולש הקטן על הגדול. מבלי לדון עוברים לפעילות במשימה 1.

פתרונות והערות

הפעילות מורכבת משתי הרחבות של הידע על חפיפה: האחת במהלך משימה 3 והשנייה במהלך משימה 5 או 6. במהלך משימה 3 בונים משולשים לא חופפים אשר להם ארבעה נתונים משותפים.

במשימה 5 (פעילות מחשב) ובמשימה 6 (פעילות חלופית) מגלים שני משולשים שיש להם חמישה נתונים משותפים, ובכל זאת אינם חופפים.

משימות 7 ו- 8 מסכמות את הנושא.

משימה 7 מצביעה על כך שחמישה נתונים הוא מספר הנתונים הגדול ביותר שלא מחייב חפיפה.

משימה 8 מראה על-ידי דוגמה נגדית שאפילו חמישה זוגות נתונים שווים אינם מבטיחים חפיפה.

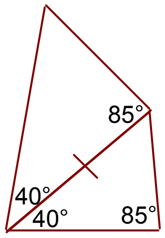
1. א. המשולשים חופפים. הם שווים בשני השוקיים ובזווית הראש.

במשולש מימין חישוב הזווית השלישית מגלה שתי זוויות שוות ולכן המשולש שווה-שוקיים.

המשולש משמאל שווה-שוקיים ולכן זווית הראש שלו 40°.

ב. המשולשים אינם חופפים. נבחר: $\alpha = 40°$, $\beta = 85°$

(גם המשולש בסעיף ג הוא דוגמה מתאימה לסעיף זה)



ג. המשולשים אינם חופפים, כי היתר בשני המשולשים ישרי-הזווית אינו באותו גודל.

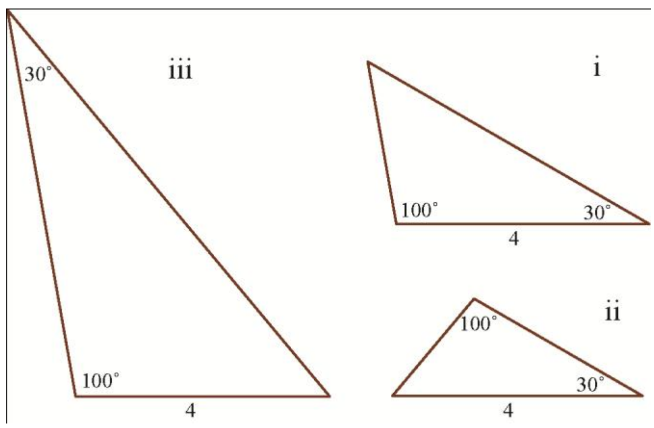
היתר במשולש השמאלי גדול מ- 4 ס"מ (יתר גדול מניצב).

ד. המשולשים חופפים. בשני המשולשים כל הזוויות 60°, לכן הם שווי-צלעות ובעלי אותו אורך צלע.

ארבעה זוגות של נתונים שווים

2. הערה: מסכמים את משימה 1 ומעלים את משימה 2. אוספים השערות ללא תגובה או דיון.

3. א. קיימות שלוש אפשרויות.



ב, ג. יוסי שרטט את משולש i מסעיף א'. גודל הזווית השלישית במשולש של יוסי הוא 50°.

שרטוטים ii ו- iii אינם חופפים למשולש של יוסי. אך גם בהם הזווית השלישית בת 50°.

ד. לשלושת המשולשים **שאינם חופפים**, **ארבעה** זוגות של **גדלים שווים**. שלוש זוגות של זוויות וזוג אחד של צלעות.

ה. ההתאמה בין הגדלים השווים במשולשים לא נשמרה.

כדי לקבל חפיפה צריך לשמור על ההתאמה בין הנתונים השווים (צלעות שוות מול זוויות שוות).

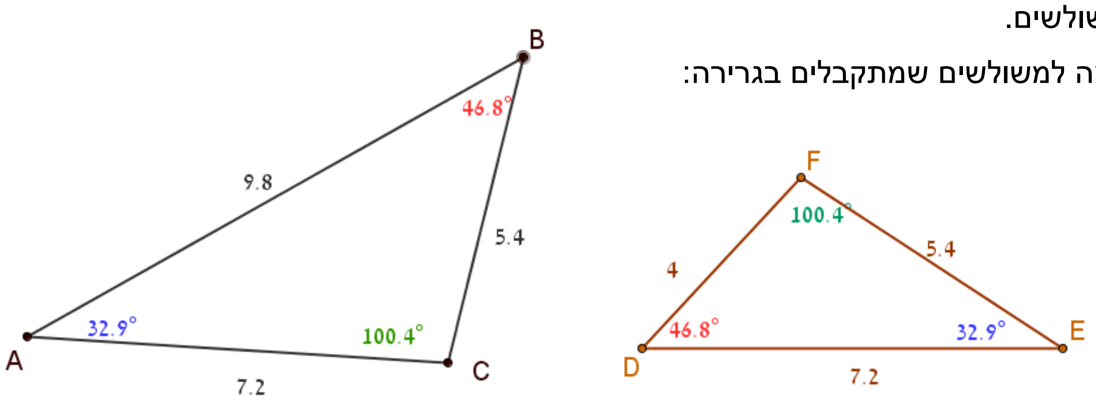
שוויון של זוג הזוויות השלישי אינו מספק מידע נוסף, כי הוא נובע משוויון שתי הזוויות האחרות.

חמישה נתונים שווים

4. הערה: דנים בתשובה למשימה 2 באמצעות משימה 3.
מעלים את משימה 4 , אוספים השערות ללא תגובה או דיון.

5. בשני המשולשים ארבעה זוגות של גדלים שווים. שלוש זוגות זוויות וזוג אחד של צלעות.
המשולשים אינם חופפים.
המשולשים דומים כי יש להם אותן זוויות.

בזמן הגרירה נשמרים זוגות הנתונים השווים. ממשיכים בגרירה עד לקבלת שוויון של צלע נוספת בשני המשולשים.
דוגמה למשולשים שמתקבלים בגרירה:



למשולשים אלה חמישה זוגות של גדלים שווים אך הם אינם חופפים.
הצלעות השוות **אינם מול** זוויות שוות.

6. לשני המשולשים חמישה זוגות של גדלים שווים. כל זוגות הזוויות שוות (106°, 44°, ו- 30°) וכן שני זוגות צלעות (הצלעות הצבועות באדום שוות זו לזו, והצלעות הצבועות בירוק שוות זו לזו).

המשולשים אינם חופפים, אך הם דומים כי יש להן אותן זוויות.

7. לא. אם יש ששה זוגות של נתונים, יש לשני המשולשים אותן צלעות ואותן זוויות. די בשוויון של כל הצלעות לחפיפה (משולשים חופפים לפי צלע, צלע, צלע).

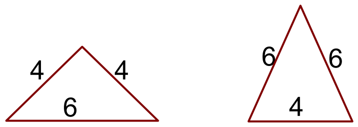
8. א. $DE = 4$ $EH = 6$
ב. המשולשים דומים
לכן: $6 : 4 = 4 : DH$ מכאן $DH = 2.\dot{6}$ (אם תלמידים אינם מכירים את הסימון $2.\dot{6} = 2.666...$ כדאי להכיר להם אותו).
$4 : 6 = 6 : BC$ מכאן $BC = 9$

שומרים על כושר

1. יובל טועה. דוגמה נגדית:

משולש שווה-שוקיים בו אורך השוק 6 ס"מ ואורך הבסיס 4 ס"מ,

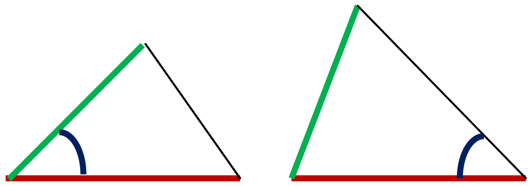
ומשולש שווה-שוקיים בו אורך השוק 4 ס"מ ואורך הבסיס 6 ס"מ



כדי שמשולשים יהיו חופפים עליהם להיות שווים **בשלושה זוגות** צלעות, העובדה שלכל צלע יש צלע באותו אורך אינה מספיקה.

2. יוני טועה.

דוגמה נגדית: הצלעות והזוויות השוות מודגשות.



3. דן צודק.

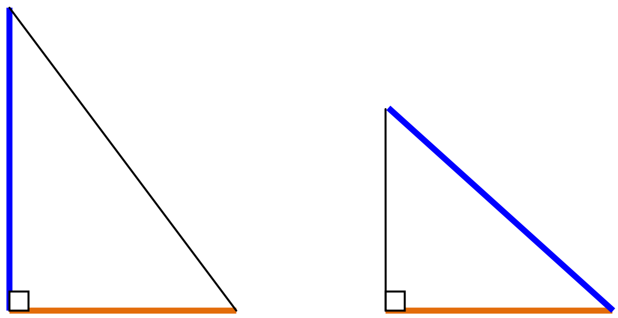
אם שני משולשים ישרי-זווית שווים בזווית חדה אחת הם שווים גם בזווית החדה הנוספת.

לכן הם שווים ביתר ובשתי הזוויות שלידה.

4. יעל טועה.

דוגמה נגדית:

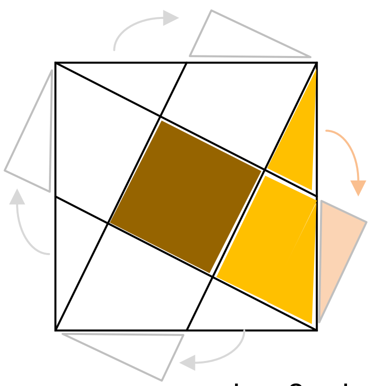
הצלעות השוות מודגשות וצבועות באותו צבע.



חידה

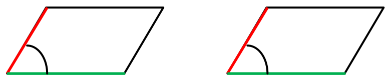
הריבוע החום תופס חמישית משטח הריבוע הגדול.

דרכים להוכחה:



- אם נסובב את המשולש הכתום הקטן הוא ישלים את הטרפז לריבוע.
  לכן, שטח הריבוע הגדול שווה לשטח של חמישה ריבועים חומים.
- שטח המשולש הכתום הגדול שווה לשטח הריבוע החום כי אחד הניצבים גדול פי 2 מצלע הריבוע, והשני שווה לצלע הריבוע. יש ארבעה משולשים כאלו וריבוע חום.
  לכן שטח הריבוע הגדול שווה לשטח של חמישה ריבועים חומים.

למסיימים

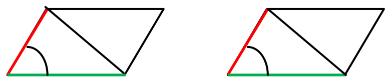


1. במקביליות שתי צלעות סמוכות והזוויות שביניהן שוות:
האם המקביליות חופפות? נמקו.

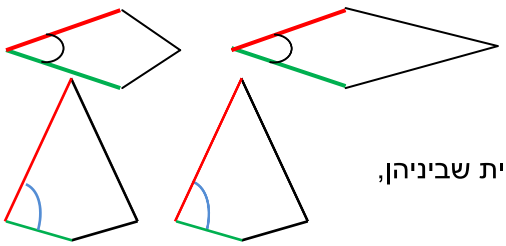
2. **שחר** אמר: שני דלתונים השווים באורכי שני זוגות של צלעות סמוכות ובזווית שביניהן הם חופפים.
האם צדק?
   א. אם כן נמקו. אם לא תנו דוגמה נגדית ונסחו טענה נכונה לגבי חפיפת דלתונים.
   ב. כמה נתונים דרושים לחפיפת דלתונים?

3. **כרמל** אמרה: שני מרובעים השווים בחמישה זוגות של גדלים נתונים, שלוש צלעות ושתי זוויות, הם חופפים.
האם צדקה?
   א. אם כן נמקו. אם לא תנו דוגמה נגדית
   ב. נסו לתקן את הטענה.

תשובות אפשריות



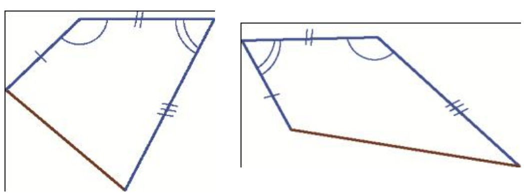
1. המקביליות חופפות.
אם מעבירים בכל מקבילית את האלכסון שמול הזווית הנתונה
מתקבלים שני משולשים חופפים. משלימים את המשולשים למקבילית, יוצרת מקביליות חופפות.



2. א. שחר טעה: דוגמה נגדית שני הדלתונים בשרטוט

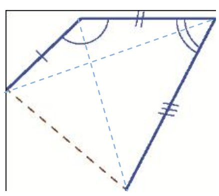
ניסוח טענה נכונה:
שני דלתונים השווים בצלעות סמוכות ש**אינן שוות** ובזווית שביניהן,
חופפים.

ב. מספיקים שלושה נתונים שווים. מנתונים אלו נובעת חפיפת המשולשים הנוצרים משתי הצלעות והאלכסון הראשי. מנתונים אלו מקבלים שוויון של כל זוגות הצלעות ושתי זוויות.

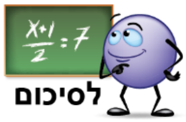


3. א. ראו דוגמה נגדית:

ב. שני מרובעים השווים באורכי שלושה זוגות של צלעות, לפי אותו סדר ובשני זוגות של זוויות הכלואות בין כל זוג צלעות סמוכות נתונות, חופפים.



בניית כל אחד מהמשולשים על פי שתי צלעות והזווית שביניהם
יוצרת משולשים חופפים. לכן יש רק דרך אחת להשלים את המרובע,
חיבור הקודקודים שאינם מחוברים.



- עומדים על החשיבות בשמירה לא רק על שוויון הנתונים אלא גם על ההתאמה ביניהם.
- דנים בהבדל בין מספר הזוגות של נתונים שווים שרשומים בגלוי במשימה, לבין מספר הנתונים הדרוש כדי להסיק חפיפה בין שני המצולעים.

  המספר השני קטן לפעמים מהראשון, מכיוון שבחלק מהמקרים אפשר להסיק זוגות נתונים נוספים מן השוויונות.

  דוגמאות:

  - אם בזוג משולשים נתון כי שני זוגות של זויות שוות, אפשר להסיק כי גודלי זוג הזוויות השלישי שווים.
  - אם במשולשים ישרי זווית נתון זוג של זוויות חדות שוות, כל זוגות הזוויות בשני המשולשים שוות.
  - אם בזוג משולשים שווי-שוקיים נתון זוג אחד של זוויות שוות בהתאמה (זווית הראש או זווית בסיס), אפשר להסיק כי גודלי שני זוגות הזוויות האחרים שווים גם כן.
  - אם בזוג משולשים שווי-שוקיים נתון זוג צלעות שוות שהן שוקיים במשולשים, נתונים למעשה שתי זוגות של צלעות שוות.