

יחידה 6: משולשים ומרובעים

6.1 חוצי-זווית



- חקירת מספר נקודות החיתוך של 4 ישרים ו-3 ישרים.
- הכרה ויישום של המשפט הישר וההפוך על חוצה-הזווית
- חקירת חוצי-זווית במרובע
- חקירת חוצי-זווית במשולש

הערות:

- הפעילות ארוכה מהרגיל ודורשת רמה גבוהה של הבנה.
- אם למדו לאחרונה את המשפט הישר וההפוך על חוצה זווית, רצוי לתת תזכורת בשיעור קודם. במקרה זה אין צורך לעסוק בו במסגרת הפעילות.
- **חשוב** שהפעילות על חוצי-זווית במרובע תקדים לפעילות על חוצי-זווית במשולש.
- לעומת זאת, **נוח** להתחיל ממספר נקודות החיתוך של שלושה ישרים ולקבל מהם את המספר המתאים לארבעה ישרים על-ידי הוספת ישר בדרכים שונות.
- אם יש אפשרות לחלק את הפעילות לשתי פעילויות, בראשונה נעסוק בישרים כלשהם, ובשנייה בחוצי-זווית במרובע ובמשולש. הפעילות הראשונה קצרה יותר. אפשר להוסיף בסופה את המשפטים על חוצי-הזווית הכהנה. כמו כן הפעילות הנוספת במדריך מתאימה לחלק הראשון.



1. היישומון "חוצי-זווית במרובע" באתר מתמטיקה משולבת (מדור מצוינות רחובות)

<http://ggbtu.be/maVVoHD5n>

2. היישומון "חוצי-זווית במשולש" באתר מתמטיקה משולבת (מדור מצוינות רחובות).

<http://ggbtu.be/mr6xciza9>



מציגים את משימת הפתיחה על הלוח, ואוספים השערות מבלי להגיב.
מציעים **להקדים** חקירת הקשר בין מספר הישרים למספר נקודות החיתוך שלהם - לא דווקא בהקשר של חוצי-זווית. (הרחבת החקירה כבסיס לחקירה הדרושה בהמשך)

שלב ראשון: חקירת ארבעת חוצי-הזווית במרובע

- משימות 2-3 עוסקות במשפטים על חוצה-זווית.
- משימה 1 (חוקרת את מספר נקודות החיתוך של ארבעה ישרים) בצירוף משימות 2-3 הן הכנה לחקירה במשימה 4 או במשימות 5 ו-6 (מספר נקודות החיתוך של חוצי-הזווית).
- במשימה 1 חשוב למנוע מצבים בהם מספר הנקודות הנספרות קטן מהמצב הקיים (למשל, התעלמות מספירת שני ישרים שנחתכים מחוץ לשרטוט).
- לפני העבודה במשימה 4 או 5 נציג על הלוח את כל האפשרויות המתקבלות ממשימה 1, כהכנה לחקירה בשאלה הראשונה המוצגת בפתיחת השיעור - כמה נקודות חיתוך יכולות להיות לארבעת חוצי-הזווית במרובע.
- נדגיש שהמשפטים ממשימות 2, 3 הנם כלי להצדקת ממצאי החקירה בשלב זה ובשלב הבא.

שלב שני: חקירת שלושת חוצי-הזווית במשולש

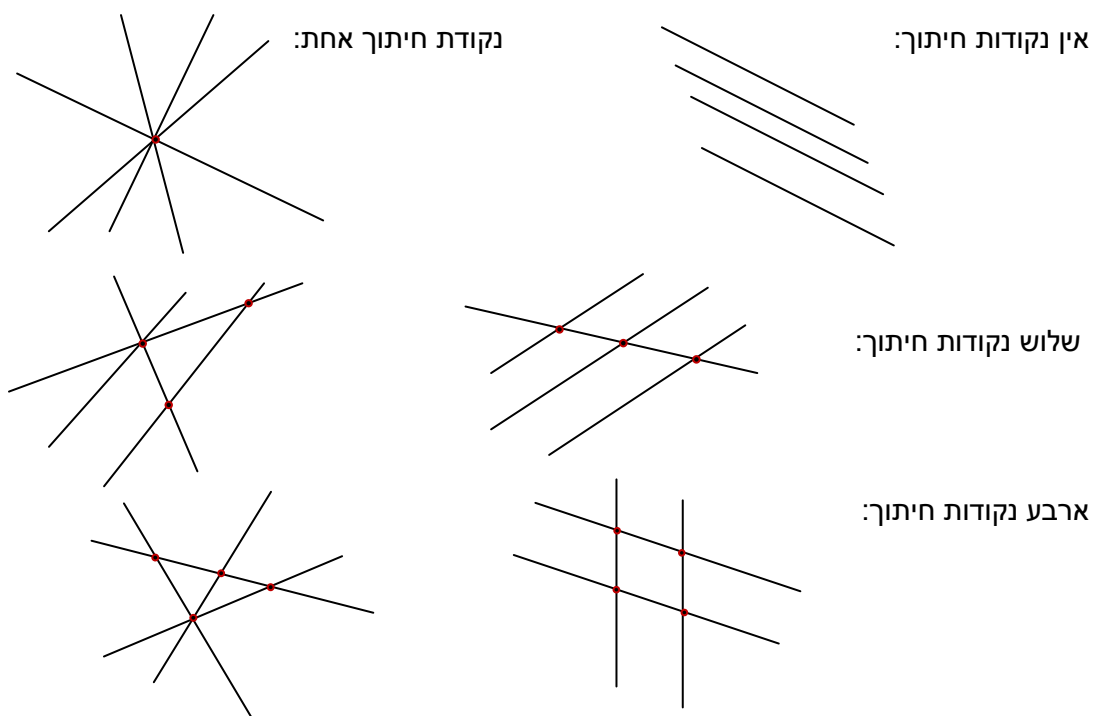
- משימה 7 משמשת הכנה למשימה 8 או 9.
- משימה 7 מאפשרת שיחזור המסקנות ממשימה 1 (הוספת ישר רביעי לאפשרויות של 3 ישרים).

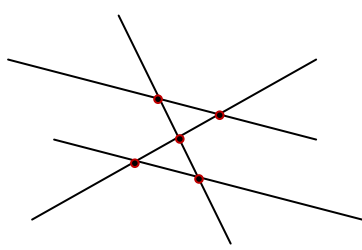
ארבעה ישרים

1. הערות:

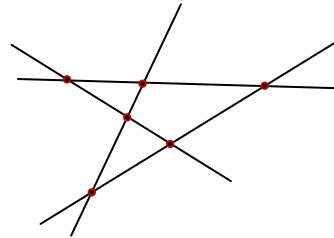
- אפשר לתת לקבוצות של תלמידים ארבעה ישרים על שקפים כדי לעודד חקירה **משותפת**.
- חשוב לעודד חקירה מסודרת. בזמן המעבר בין קבוצות תלמידים החוקרות את הנושא חשוב להפנות את תשומת הלב לסדר.

מספר נקודות החיתוך (של ארבעה ישרים):





חמש נקודות חיתוך:

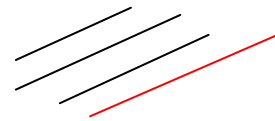
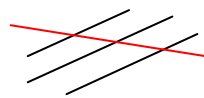


שש נקודות חיתוך:

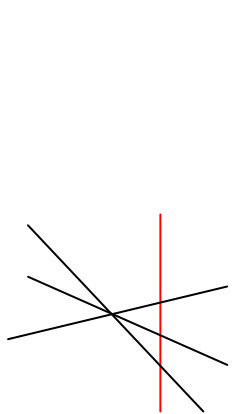
המספר הגבוה ביותר הוא 6 נקודות חיתוך, והוא מתקבל כאשר כל ישר חותך כל אחד מהאחרים. מספר נמוך יותר של נקודות חיתוך נוצר כאשר יש יותר משני ישרים עם נקודת חיתוך משותפת, או כאשר יש ישרים מקבילים.

אין מצב בו יתקבלו ארבעה ישרים נחתכים בשתי נקודות חיתוך:

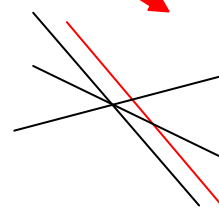
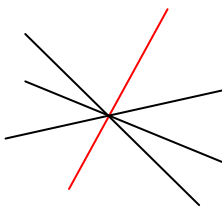
שנוי מצב של ישר אחד ממצב בו אין אף נקודה או יש נקודת חיתוך יחידה, יוביל ל- 3 נקודות חיתוך או יותר. אפס נקודות חיתוך יש כאשר הישרים מקבילים.



שינוי מצב של הישר האדום ייצור שלוש נקודות חיתוך.



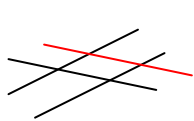
ייצור 4 נקודות חיתוך אם לא יהיה מקביל לאחד מהם.



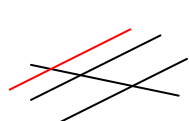
הישרים נחתכים בנקודה אחת, שינוי מצב של הישר האדום ייצור 3 נקודות חיתוך אם הישר יונח כך שיקביל לאחד מהישרים

בכל מקרה אחר נקבל יותר משתי נקודות:

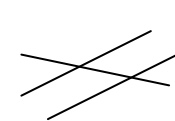
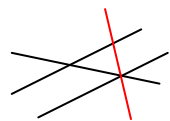
אם לשלושה ישרים יש רק שתי נקודות חיתוך, שניים מהישרים מקבילים והשלישי חותך אותם. ישר רביעי יוסיף נקודת חיתוך אחת או שתי נקודות חיתוך.



או



או

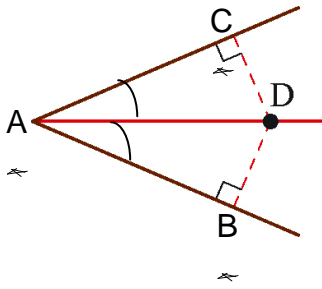


אם לשלושה ישרים יש כבר שלוש נקודות חיתוך, הוספת ישר לא תוכל להפחית את נקודות החיתוך שכבר קיימות.

חוצה זווית במשולש

2. הוכחת המשפט:

כל נקודה על חוצה-זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית



שוויון המרחקים נובע מחפיפת המשולשים $\triangle ABD$ ו- $\triangle ACD$:

קטע חוצה הזווית הוא **צלע משותפת**.

האנכים יוצרים **זוויות ישרות** ולכן שוות.

חוצה-הזווית יוצר שתי **זוויות שוות**, לכן כל הזוויות בשני המשולשים שוות.

למשולשים צלע משותפת והזוויות לידה בשני המשולשים שוות.

מהחפיפה מתקבל שוויון המרחקים.

3. המשפט ההפוך:

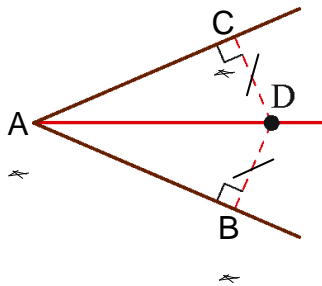
כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית, היא על חוצה הזווית.

הוכחת המשפט מתבססת על

חפיפת המשולשים $\triangle ABD$ ו- $\triangle ACD$

מתקבלים משולשים ישרי-זווית השווים ביתר (קטע AD המשותף לשניהם)

ובאחד הניצבים (המרחקים משוקי הזווית שווים).



מהחפיפה מתקבל שוויון הזוויות בנקודה A ולכן **AD חוצה-זווית**.

4. התייחסות למטלות במחשב:

א. מספר נקודות החיתוך הגדול ביותר, של ארבעה חוצי-זווית, הוא **שש** נקודות. (אין אף זוג של חוצי-זווית מקבילים)

ב. אם מתקבלות **חמש** נקודות חיתוך, **ארבעת** חוצי-הזווית יוצרים **טרפז**. (יש זוג חוצי-זווית מקבילים)

ג. אם מתקבלות **ארבע** נקודות חיתוך, **ארבעת** חוצי-הזווית יוצרים **מלבן**. המרובע המקורי הוא מקבילית.

ד. **אי אפשר** לקבל **שלוש** נקודות חיתוך. (לא יתכן שיש שלושה חוצי-זווית מקבילים (ראו טענה ב))

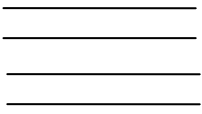
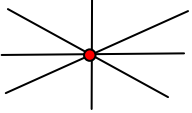


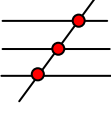
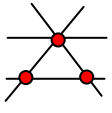
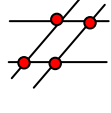
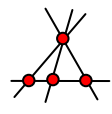
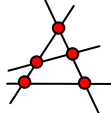
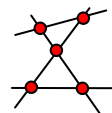
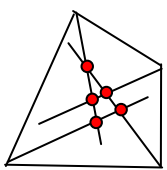
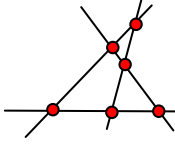
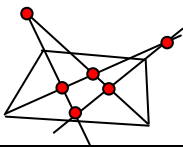
ה. אם ארבעת חוצי-הזווית נפגשים בנקודה **אחת**, מרחקי הנקודה מכל צלעות המרובע **שווים**.

(כיוון שכל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחק שווה משוקי הזווית)

רצוי לשאול מה הקשר בין מספר נקודות החיתוך של ארבעה **ישרים כלשהם**, לבין מספר נקודות החיתוך של

ארבעת **חוצי-הזווית** במרובע. נשאל גם: מהי הסיבה לשוני?

אפשר להדגים את ההקבלה בעזרת טבלה:

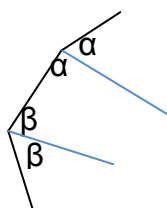
סוג הישרים מס. הנקודות	ארבעה ישרים כלשהם	ארבעה חוצי-זוויות במרובע
0		לא ייתכן, כי חוצי-זוויות סמוכות במרובע אינם יכולים להקביל זה לזה.
1		ייתכן. זה קורה בדלתון במעוין  במרובעים נוספים 
2	לא ייתכן	הדבר לא ייתכן בארבעה ישרים כלשהם ולכן לא ייתכן גם בארבעה חוצי-זוויות
3	א.  ב. 	מצב א לא ייתכן כי חוצי-זוויות סמוכות במרובע אינם יכולים להקביל זה לזה. טענה זו יש להוכיח (ההוכחה בהמשך) מצב ב לא ייתכן כי אם שלושה חוצי-זוויות במרובע עוברים דרך נקודה אחת, אז גם הרביעי עובר דרכה (ההוכחה בהמשך).
4	א.  ב. 	מצב א ייתכן. במקרה זה המרובע החיצוני הוא מקבילית והמרובע הפנימי מלבן. (בטענה זו ידונו התלמידים במהלך החקירה, כולל הוכחה) מצב ב לא ייתכן כי אם שלושה חוצי-זוויות במרובע עוברים דרך נקודה אחת גם הרביעי עובר דרכה.
5	א.  ב. 	שני המצבים ייתכנו. במקרה זה שני חוצי-זוויות מקבילים זה לזה. לדוגמה: 
6		ייתכן לדוגמה 

דרושה כמובן הוכחת הטענות שנרשמו בטבלה.

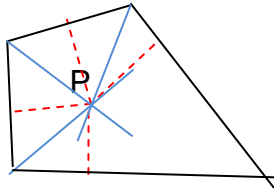
א. חוצי-זוויות סמוכות במרובע לא יכולים להיות מקבילים.

הקווים הכחולים מייצגים חוצים של זוויות סמוכות במרובע. נניח שהם מקבילים.

סכום זוויות חד צדדיות בין מקבילים הוא 180° , לכן $2\alpha + 2\beta = 360$, לא יתכן שסכום זוויות סמוכות הוא 360° כי זהו סכום כל הזוויות במרובע. הוכחנו בדרך השלילה שחוצי-זוויות סמוכות לא יכולים להיות מקבילים.



ב. אם שלושה חוצי-הזווית במרובע נפגשים בנקודה אחת חוצה הזווית הנוסף עובר באותה נקודה.



נקודת החיתוך P נמצאת במרחק שווה משוקי שלוש זווית. לכן הנקודה נמצאת במרחק שווה גם משוקי הזווית הרביעית. כלומר, היא גם על חוצה-הזווית הרביעית.

ג. אם חוצי-הזווית במרובע נחתכים בארבע נקודות, אז המרובע החיצוני הוא מקבילית והמרובע הפנימי מלבן.

נראה תחילה שחוצי-הזווית יוצרים מקבילית:

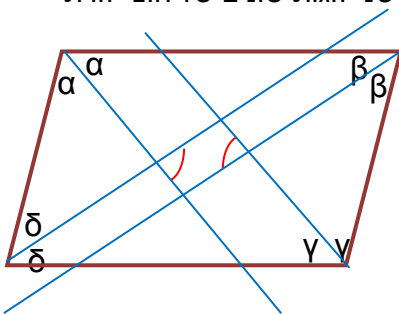
אם ארבעה ישרים נפגשים בארבע נקודות שונות, אז שלושה מהם נפגשים בנקודה אחת או שיש שני זוגות שונים של ישרים מקבילים.

בטענה ב הראנו שלא יתכן ששלושה חוצי-זווית בלבד נפגשים. לכן קבלנו שני זוגות שונים של חוצי-זווית שהם מקבילים, כמו בשרטוט.

מכאן המרובע שהם יוצרים (הכחול) הוא מקבילית.

נראה שהמקבילית הפנימית (בצבע כחול) היא מלבן:

הזוויות המסומנות באדום שוות (זוויות נגדיות במקבילית).



$$* \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180 \quad (\text{מחצית סכום הזוויות במרובע החיצוני})$$

$$** \quad \text{הזוויות הפנימיות במרובע הפנימי (באדום) שוות ל- } 180 - (\alpha + \delta) \quad \text{ו- } 180 - (\beta + \gamma)$$

כי הן קודקודיות לזווית השלישית בכל אחד מהמשולשים.

$$\text{מ- } * \quad \text{ו- } ** \quad \leftarrow \quad 180 - (\beta + \gamma) + 180 - (\alpha + \delta) = 360 - 180 = 180$$

\leftarrow סכום הזוויות הנגדיות (בצבע אדום) שווה 180° והן שוות זו לזו. לכן כל אחת מהן שווה 90°

כלומר המקבילית היא מלבן.

נראה שהמרובע החיצוני (בצבע חום) הוא מקבילית:

$$\text{מסקנה מהשלב הקודם: } \alpha + \delta = 90^\circ \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\text{לכן: } 2\alpha + 2\beta = 180 \quad 2\alpha + 2\delta = 180^\circ$$

המרובע הוא מקבילית כי סכום הזוויות הסמוכות במרובע הוא 180° לכן כל זוג צלעות נגדיות מקבילות.

5. משימה זו היא משימה חלופית למשימה 4.

i. **6 נקודות** – מרובע שאין בו חוצי-זווית מקבילים, ואין יותר משני-חוצי זווית שנפגשים בנקודה.

ii. **5 נקודות** – ABCD מרובע שיש בו זוג יחיד של חוצי-זווית מקבילים זה לזה. נוצר טרפז.

iii. **4 נקודות** – ABCD מקבילית בה חוצי-זווית נגדיות מקבילים זה לזה וחוצי-זווית סמוכות מאונכים זה לזה. חוצי-הזווית יוצרים מלבן.

iv. **נקודה אחת** – כל חוצי-הזווית נפגשים בנקודה אחת. המרחקים של נקודת החיתוך נמצאים במרחק שווה מכל הצלעות המרובע.

ב. מלבן.

ג. מקבילית

ד. ראו הוכחות במשימה 4 טענות ב ו- ג.

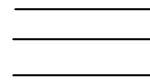
הערה: ראו טבלה למספר נקודות החיתוך במשימה 4. רצוי להציג אותה בסיכום.

6. ג. אם כל חוצי-הזווית נפגשים בנקודה אחת, נקודת החיתוך נמצאת במרחק שווה מצלעות המרובע.

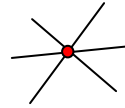
שלושה ישרים

7. האפשרויות השונות לגבי נקודות החיתוך של שלושה ישרים הם:

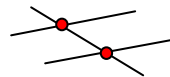
א. אין נקודת חיתוך שלוש ישרים מקבילים.



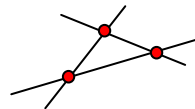
ב. נקודת חיתוך אחת



ג. שתי נקודות חיתוך שני ישרים מקבילים וישר שלישי חותך אותם.



ד. שלוש נקודות חיתוך



חוצי-זווית במשולש

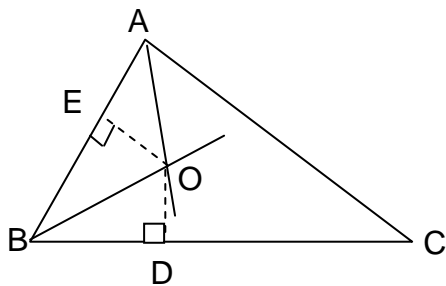
8. השערה: יתכנו 1 – 3 נקודות חיתוך של שלושת חוצי הזווית במשולש.

בבדיקה על ידי שינוי המשולש: בכל פעם מתקבלת נקודת חיתוך יחידה.

שלושת המרחקים של נקודת החיתוך מהצלעות שווים.

הצורך בהוכחת המשפט ששלושת חוצי-הזווית נפגשים בנקודה אחת, נתמך בהפתעה שהתקבלה.

משפט: במשולש שלושת חוצי-הזווית נפגשים בנקודה אחת.



נתון: AO ו- BO חוצי-זווית במשולש ABC .

צ"ל: CO חוצה-זווית.

הוכחה: הנקודה O נמצאת על חוצה הזווית B .

לכן O במרחקים שווים משוקי הזווית B .

כלומר, $OD = OE$.

הנקודה O נמצאת גם על חוצה הזווית A .

לכן O במרחקים שווים משוקי הזווית A .

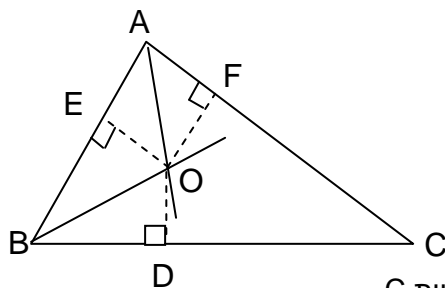
כלומר, $OE = OF$.

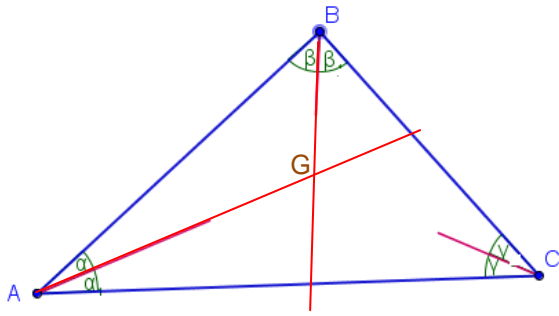


$OD = OF$

כלומר הנקודה O נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית C .

לכן O נמצאת על חוצה הזווית C .

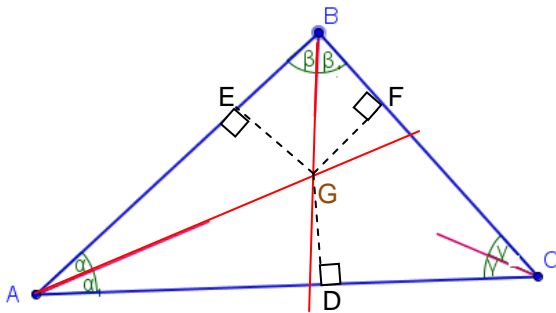




9. א. השערה: יתכנו 1 – 3 נקודות חיתוך
 ב. שרטוט: בכל פעם מתקבלת נקודת חיתוך יחידה.
 ג. אם G נקודת החיתוך של שני חוצי-זוויות במשולש, אז חוצה-הזווית השלישי חייב לעבור דרך G.
 ההוכחה מסתמכת על משימות 2 ו-3.

- נתון: AG חוצה את A
 BG חוצה את B
 טענה: CG הוא חוצה זווית C

הוכחה: נוריד אנכים מ-G לצלעות המשולש ABC



- DG = EG כי G על חוצה זווית A
 FG = EG כי G על חוצה זווית B
 (כל נקודה על חוצה הזווית נמצאת

במרחק שווה משוקי הזווית)

$$\Downarrow$$

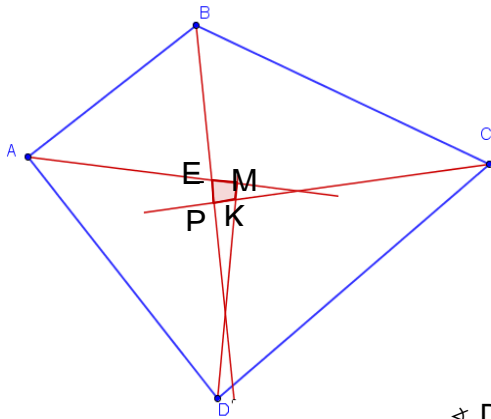
$$DG = FG$$

$$\Downarrow$$

CG הוא חוצה זווית C (כל נקודה הנמצאת במרחק שווה משוקי הזווית נמצאת על חוצה-הזווית)



שומרים על כושר



1. א. זוויות המשולש $\triangle AEB$ $86:2 = 43^\circ$

$120:2 = 60^\circ$

$\sphericalangle AEB = 180 - 103 = 77^\circ$

זוויות המשולש $\triangle DKC$ $90:2 = 45^\circ$

$64:2 = 32^\circ$

$\sphericalangle DKC = 180 - 77 = 103^\circ$

ב. $\sphericalangle E + \sphericalangle K = 77 + 103 = 180^\circ$ (על סמך סעיף א)

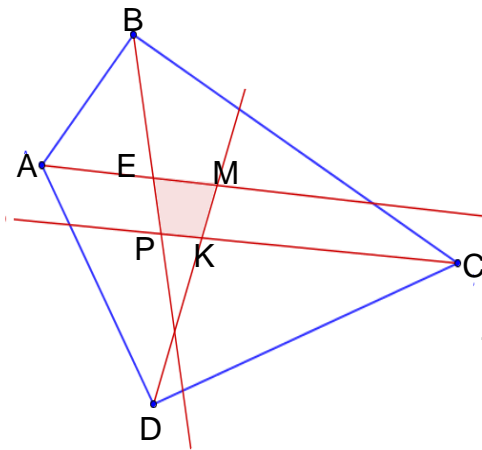
$\sphericalangle M + \sphericalangle P = 360 - 180 = 180^\circ$ (סכום זוויות במרובע 360°)

2. א. הגדלים של זוויות המרובע ABCD הם: $\angle A=94^\circ$ $\angle B=110^\circ$ $\angle C=46^\circ$ $\angle D=110^\circ$

במרובע EMKP נקבל:

$$\angle E + \angle K = 360 - (110 + 94 + 110 + 46) : 2 = 180^\circ$$

$$\angle M + \angle P = 360 - (94 + 110 + 46 + 110) : 2 = 180^\circ$$



ב. $EM \parallel PK$ כי יש לחוצי-הזווית חמש נקודות חיתוך.

כלומר: יש זוג אחד של חוצי-זוויות שאינן סמוכות, שהם מקבילים.



EMKP טרפז

$$\angle M + \angle K = 180^\circ \text{ חד צדדיות בין מקבילים}$$

$$\angle E + \angle K = 180^\circ \text{ לפי סעיף א } (\angle E = 180 - (\angle A + \angle B) : 2)$$



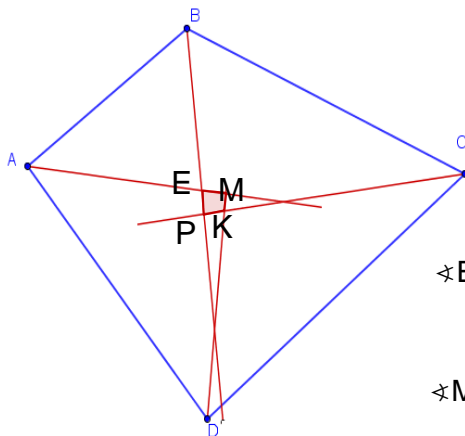
$$\angle M = \angle E \text{ (כל אחת שווה ל- } 180 - K \text{)}$$

כלומר: **הטרפז שווה שוקיים** (זוויות הבסיס שוות)

3. א-ב. כל תלמיד בוחר גודל לזוויות במרובע ומחשב

בדומה למשימות הקודמות.

ג. סכום זוויות נגדיות במרובע הנוצר על ידי חוצי-זוויות של מרובע הוא 180°



$$\angle E = 180 - (\angle A + \angle B) : 2$$

$$\angle K = 180 - (\angle C + \angle D) : 2$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$



$$\angle E + \angle K = 360 - (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) : 2 = 180^\circ$$

באותה דרך נקבל:

$$\angle M + \angle P = 360 - (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) : 2 = 180^\circ$$

מסקנות מסעיף ג

אם זוג אחד של חוצי-זוויות נגדיות מקביל, הטרפז שווה-שוקיים.

אם שתי זוגות של חוצי-זוויות נגדיות מקבילות, המרובע מלבן (הזוויות הנגדיות שוות זו לזו, וסכומן 180°).

1. בכל הסעיפים הבאים מחברים כל שתי נקודות באמצעות ישר.
- א. מצאו כמה ישרים אפשר להעביר, פרטו את כל האפשרויות. עבור: 3 נקודות, 4 נקודות ו- 5 נקודות.
- ב. סדרו בטבלה את הנתונים שמצאתם. (השלימו בה לכל מספר נקודות את מספר הישרים הגדול ביותר שאפשר להעביר)
- מצאו והצדיקו קשר בין מספר הישרים המירבי בשלב מסוים לבין הנתונים בשלב הקודם.
- ג. קבעו בעזרת הקשר שמצאתם בסעיף ב מהו מספר הישרים המירבי העוברים דרך 17 נקודות, אם דרך 16 נקודות עוברים 120 ישרים.
- ד. יישמו את הקשר שמצאתם בסעיף ב לבניית טבלת אקסל.
- ה. מהו מספר המירבי של ישרים העוברים דרך n נקודות?

תשובות אפשריות

א. דרך 3 נקודות.

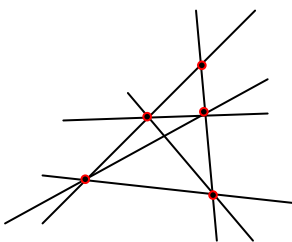
- ישר אחד - כל הנקודות נמצאות על ישר אחד
- 3 ישרים - אין יותר משתי נקודות על ישר

דרך 4 נקודות:

- ישר אחד - כל הנקודות נמצאות על ישר אחד
- 4 ישרים - 3 נקודות נמצאות על ישר אחד
- 6 ישרים - אין 3 נקודות או יותר, על אותו ישר

דרך 5 נקודות:

- ישר אחד - כל הנקודות נמצאות על ישר אחד
- 6 ישרים - 3 נקודות נמצאות על כל אחד משני ישרים (ראו דוגמה)
- 8 ישרים - 3 נקודות נמצאות על ישר אחד
- 10 ישרים - אין 3 נקודות או יותר, על אותו ישר



דוגמה: דרך 5 נקודות 6 ישרים

- ג. מספר הישרים המירבי בשלב מסוים הוא סכום מספר הנקודות והישרים בשלב הקודם. הסיבה: תוספת נקודה מוסיפה על הישרים הקיימים עוד מספר ישרים כמספר הנקודות הקודם. כיוון שמחברים את הנקודה החדשה לכל אחת מהקודמות.
- ד. דרך 17 נקודות יעברו 136 ישרים.
- ה. $2 : n(n-1)$ כל נקודה (n) מחברים לכל נקודה אחרת ($n-1$).
- מחלקים ל- 2 כי בדרך זו כל ישר ספרנו פעמיים.



משקפים את מהלך החקירה

- העלאת השערות בקשר למספר נקודות חיתוך של חוצי-זוויות: א. במרובע ב. במשולש
- במרובע: **הקדמנו** לחקירה של נקודות חיתוך של חוצי-זוויות במרובע, חקירה על נקודות חיתוך של ארבעה ישרים כלשהם. מה לדעתכם הסיבה? (חקירה פשוטה יותר, שאחר כך אפשר בעזרתה לענות על השאלה המקורית)
- קבלנו כלים המאפשרים לבדוק מה ממצאי החקירה הקודמת נכון גם למקרה הפרטי של חוצי-זוויות. מהם הכלים שניתנו באלו משימות? (המשפטים הישר וההפוך על חוצה הזווית)
- במשולש חזרנו על התהליך של החקירה במרובע. מה ההפתעה במשולש? (נקודת חיתוך יחידה)

הערות:

אם מחלקים את הפעילות לשתיים. מסכמים כל חלק בנפרד.
בחלק הראשון מציגים את האפשרויות של נקודות חיתוך של **ישרים כלשהם**. תחילה שלושה ישרים ואחר כך ארבעה ישרים. קל יותר לחקור נקודות חיתוך של ארבע ישרים, אחרי שחוקרים נקודות חיתוך של שלושה ישרים. המשימה **למסיימים** מתאימה לחלק זה.

בחלק השני מתחילים בחוצי-זוויות במרובע. מציגים בסיכום ביניים את הטבלה המשווה נקודות חיתוך של ארבעה ישרים עם נקודות חיתוך של חוצי-זוויות במרובע.
רק **בסיום מתייחסים לחוצי-הזווית של משולש**, ומדגישים את ההפתעה, שבניגוד למרובע יש הפעם רק אפשרות אחת.