5.2 טענות באלגברה

מטרות

- חקירת תופעות מספריות שונות.
- זיהוי, הכללה והנמקה של חוקיות בסיטואציה מתמטית,.
- שימוש באלגברה ככלי להכללה והצדקה.
- פישוט ביטויים אלגבריים.
- קישור בין ייצוגים שונים: מילולי, מספרי, גיאומטרי ואלגברי.
- שימוש בכלים טכנולוגיים לחקירה ולבדיקה.

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (למשל, Excel).

פתיחה

קוראים את הוראות המשחק ומדגימים אותו. מבקשים לשער אם המשחק הוגן.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת בחקירת תופעות מספריות שונות. מוכיחים שוויונות ואי-שוויונות אלגבריים בעזרת שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר.

אפשר לגשת לשאלות מסוג זה בדרך הבאה:

- בדיקה של מספר דוגמאות מספריות.
- מציאת חוקיות או בדיקה של חוקיות נתונה.
- הוכחת החוקיות.

חשוב להדגיש את ההבדל בין שימוש בדוגמאות לשם גילוי חוקיות ובין הוכחה כללית.

על-מנת להפריך טענה מספיקה דוגמה נגדית אחת ואילו הוכחה כללית של טענה צריכה להראות נכונותה לכל האפשרויות.

1. ב. אפשר לרכז את התוצאות שהתקבלו בכיתה בטבלה.

לדוגמה:

ריבוע הממוצע של המספרים	ממוצע ריבועי המספרים	המספרים (טבעיים)
$(\frac{3+8}{2})^2 = 30.25$	$\frac{3^2+8^2}{2} = 36.5$	8 , 3
$(\frac{1+2}{2})^2 = 2.25$	$\frac{1^2+2^2}{2} = 2.5$	2 , 1
$(\frac{5+9}{2})^2 = 49$	$\frac{5^2+9^2}{2} = 53$	9 , 5
$(\frac{4+12}{2})^2 = 64$	$\frac{4^2+12^2}{2} = 80$	12 , 4

ג. מתוך ארבע הדוגמאות רואים כי ממוצע ריבועי המספרים גדול מריבוע הממוצע של המספרים (מדובר בשני מספרים טבעיים שונים). לכן, סביר לשער, כי המשחק אינו הוגן.

ד. נסמן: a ו- b הם מספרים טבעיים, $a \neq b$.

<u>ריבוע הממוצע של המספרים</u>

$$(\frac{a+b}{2})^2 =$$

$$\frac{a^2+b^2}{4} + \frac{ab}{2}$$

<u>ממוצע ריבועי המספרים</u>

$$\frac{a^2+b^2}{2} =$$

$$\frac{a^2+b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{4}$$

בשני הביטויים יש חלק זהה: $\frac{a^2+b^2}{4}$.

לכן אפשר להוריד חלק זה מבלי לשנות את יחס השוויון או האי-שוויון בין שני הביטויים.

אם נשער, כי $\frac{ab}{2} < \frac{a^2+b^2}{4}$, נוכל להגיע על-ידי שרשרת של אי-שוויונות שקולים לאי-שוויון שהוא נכון

לכל זוג מספרים טבעיים: $\frac{a^2+b^2}{4} > \frac{ab}{2} \quad / \cdot 4$

$$a^2 + b^2 > 2ab \quad / - 2ab$$

$$a^2 + b^2 - 2ab > 0$$

כלומר: $(a - b)^2 > 0$

מכאן נסיק כי ההשערה המקורית $\frac{ab}{2} < \frac{a^2+b^2}{4}$ נכונה לכל a ו- b טבעיים, ולכן גם $\frac{a^2+b^2}{2} > (\frac{a+b}{2})^2$ נכון לכל a ו- b טבעיים.

המסקנה: לכל שני מספרים טבעיים שונים מתקיים כי ממוצע ריבועי המספרים **גדול** מריבוע הממוצע של המספרים. לכן המשחק אינו הוגן.

2. א. דוגמאות:

$2(a^2 + b^2)$	מספרים טבעיים a ו- b
$2(6^2 + 4^2) = 104 = 10^2 + 2^2$	$b = 4$, $a = 6$
$2(5^2 + 3^2) = 68 = 8^2 + 2^2$	$b = 3$, $a = 5$
$2(5^2 + 6^2) = 122 = 1^2 + 11^2$	$b = 6$, $a = 5$
$2(9^2 + 5^2) = 212 = 14^2 + 4^2$	$b = 5$, $a = 9$

ב. a ו- b מייצגים זוג מספרים טבעיים.

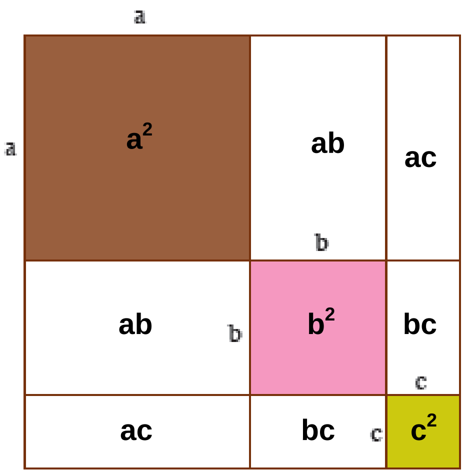
על-סמך הדוגמאות, אפשר לשער כי הקשר הוא: $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$

ייתכן ויהיו תלמידים שיתקשו במציאת הקשר, יש לסייע להם בכך.

ג. אפשר לפשט את אגף ימין של הקשר שזיהינו ולקבל, באמצעות שרשרת של ביטויים זהים, את הביטוי שבאגף שמאל של ההשערה:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 =$$
$$a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 =$$
$$2a^2 + 2b^2 =$$
$$2(a^2 + b^2)$$

3. בסיטואציה ייצוג גיאומטרי של נוסחת כפל מקוצר שבה ריבוע הסכום של שלושה מספרים $(a + b + c)^2$.



א. אורך צלע הריבוע הגדול: $(a + b + c)$ יחידות אורך,

לכן שטחו $(a + b + c)^2$ יחידות שטח.

הריבוע הגדול מחולק ל- 9 מלבנים.

שטח הריבוע הגדול שווה לסכום השטחים של תשעת המלבנים האלה. (בתוך כל מלבן רשמנו את שטחו.)

מסקנה:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

ב. אפשר לפשט את הביטוי $(a + b + c)^2$ בשתי דרכים:

- להיעזר בחוק הפילוג המורחב, לכפול ולפשט.

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c)$$

- להיעזר בנוסחת הכפל המקוצר של ריבוע הסכום של שני מחוברים כך:

$$(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 =$$
$$(a + b)^2 + c^2 + 2c(a + b) =$$
$$a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2ac + 2bc$$

4. נעזרים בפעולות בשברים אלגבריים ובנתונים כדי לחשב את הערכים של הביטויים.

מהנתון $abc = 3$ נובע כי $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. חשוב לציין זאת לגבי תחום ההגדרה של השברים האלגבריים.

א. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{6}{3}=2$

ב. $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{c+a+b}{abc}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

ג. מהנוסחה שהתקבלה בשאלה 3 מסיקים כי $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 – 2(ab + bc + ac)$

לכן: $a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 – 2\cdot 6 = 4$.

5. בודקים מספר דוגמאות: $1^2 – 1 = 0$, $3^2 – 1 = 8$, $5^2 – 1 = 24$, $7^2 – 1 = 48$

התוצאה המתקבלת היא מספר שמתחלק ב- 8 ללא שארית.

נוכיח את המקרה הכללי:

a מייצג מספר שלם אי-זוגי. $a^2 – 1 = (a – 1)(a + 1)$.

שני הגורמים $(a + 1)$ ו- $(a – 1)$ הם מספרים זוגיים עוקבים, לכן אחד מהם מתחלק ב- 2 והאחר מתחלק ב- 4.

כלומר, המכפלה מתחלקת ב- 8.

אפשרות אחרת לייצוג המספרים היא:

a מייצג מספר שלם. ביטוי אלגברי למספר אי-זוגי הוא $(2a + 1)$.

לכן, $(2a + 1)^2 – 1 = 4a^2 + 4a = 4a(a + 1)$

נתבונן בביטוי $4a(a + 1)$. אחד הגורמים במכפלה זו הוא 4 ומכפלת שני הגורמים האחרים היא זוגית (כי a ו- $(a + 1)$ הם זוג מספרים שלמים עוקבים לכן אחד מהם הוא מספר זוגי והאחר הוא מספר אי-זוגי, וכלומר המכפלה שלהם תמיד זוגית).

מכאן שהביטוי $4a(a + 1)$ הוא כפולה ב- 4 של מספר זוגי, לכן מתחלק ב- 8 ללא שארית.

הערה: אם a מייצג מספר ראשוני גדול מ- 5, אז $a^2 – 1$ מייצג מספר המסתיים ב- 0 או ב- 8 (בנוסף על התחלקותו ב- 8 כפי שהראינו קודם).

הוכחה: כל מספר ראשוני גדול מ- 5 הוא מספר אי-זוגי, לכן התוצאה היא מספר שמתחלק ב- 8 (הראינו).

ספרת היחידות של כל מספר ראשוני גדול מ- 5 היא 1 או 3 או 7 או 9.

ריבועי המספרים האלה מסתיימים ב- 1 או ב- 9 , ואם נפחית 1 יתקבל מספר שמסתיים ב- 0 או ב- 8.

6. א. כופלים אגף ימין בעזרת חוק הפילוג המורחב ומפשטים.

ב. ההשערה: $1 – x^5 = (1 – x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$.

להוכחת ההשערה, כופלים ומפשטים אגף ימין.

7. גליון *Excel* ממולא:

	A	B	C	D	E	F
1	1	1	1	1	4	1
2	2	4	8	16	15	16
3	3	9	27	81	40	81
4	4	16	64	256	85	256
5	5	25	125	625	156	625
6	6	36	216	1296	259	1296
7	7	49	343	2401	400	2401
8	8	64	512	4096	585	4096
9	9	81	729	6561	820	6561
10	10	100	1000	10000	1111	10000
11	11	121	1331	14641	1464	14641
12	12	144	1728	20736	1885	20736
13	13	169	2197	28561	2380	28561
14	14	196	2744	38416	2955	38416
15	15	225	3375	50625	3616	50625
16	16	256	4096	65536	4369	65536
17	17	289	4913	83521	5220	83521
18	18	324	5832	104976	6175	104976
19	19	361	6859	130321	7240	130321
20	20	400	8000	160000	8421	160000

ד. בעמודה A: x מספר טבעי.

בעמודה B: x^2.

בעמודה C: x^3.

בעמודה D: x^4.

בעמודה E: $1 + x + x^2 + x^3$

בעמודה F: $(1 + x + x^2 + x^3)(x - 1) + 1$

החוקיות: $(1 + x + x^2 + x^3)(x - 1) + 1 = x^4$

אפשר להוכיח את החוקיות בשתי דרכים:

דרך אחת: לכפול בעזרת חוק הפילוג המורחב ולפשט.

דרך שנייה: להסתמך על הוכחת הזהות שבשאלה 6 סעיף א:

$$1 - x^4 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)$$

$$\Downarrow$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$$

$$\Downarrow$$

$$x^4 = 1 + (x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$$

8. א.

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49 = 7^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 9 + 16 + 144 = 169 = 13^2$$

$$4^2 + 5^2 + 20^2 = 16 + 25 + 400 = 441 = 21^2$$

ב. מדובר על סכום הריבועים של שלושה מספרים. שני המספרים הראשונים הם טבעיים עוקבים, והמספר השלישי הוא המכפלה שלהם. הסכום המתקבל שווה לריבוע המספר העוקב למספר השלישי.

ג. מהדוגמאות שבסעיף א, אפשר לרשום את הקשר כך: $7 = 2^2 + 3 = 2^2 + (2 + 1)$

$13 = 3^2 + 4 = 3^2 + (3 + 1)$

$21 = 4^2 + 5 = 4^2 + (4 + 1)$

הכללה: $n^2 + (n + 1)^2 + (n(n+ 1))^2 = (n^2 + n + 1)^2$ (n מספר טבעי).

ד. להוכחת נכונות השוויון – מפשטים כל אגף בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר ומקבלים ביטויים זהים.

שומרים על כושר

1.

$+$	$(a+b)^2$	$(a-b)^2$	$(a+b)(a-b)$
$(a+b)^2$	$2a^2 + 4ab + 2b^2$	$2a^2 + 2b^2$	$2a^2 + 2ab$
$(a-b)^2$	$2a^2 + 2b^2$	$2a^2 – 4ab + 2b^2$	$2a^2 – 2ab$
$(a+b)(a-b)$	$2a^2 + 2ab$	$2a^2 – 2ab$	$2a^2 – 2b^2$

2.

$\bullet$	$a+b$	$-a-b$	$a-b$	$b-a$
$a+b$	$a^2 + 2ab + b^2$	$–a^2 – 2ab – b^2$	$a^2 – b^2$	$b^2 – a^2$
$-a-b$	$–a^2 – 2ab – b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	$b^2 – a^2$	$a^2 – b^2$
$a-b$	$a^2 – b^2$	$b^2 – a^2$	$a^2 – 2ab + b^2$	$–a^2 + 2ab – b^2$
$b-a$	$b^2 – a^2$	$a^2 – b^2$	$–a^2 + 2ab – b^2$	$a^2 – 2ab + b^2$

נייצג את המספר הדו-ספרתי שנבחר על-ידי $10x + y$ (x ו- y מספרים טבעיים מ- 1 עד 9 כולל).

המספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך: $10y + x$

ידוע כי $(10x + y)^2 – (10y + x)^2$ הוא ריבוע של מספר שלם

$$(10x + y)^2 – (10y + x)^2 =$$
$$100x^2 + 20xy + y^2 – 100y^2 – 20xy – x^2 =$$
$$99x^2 – 99y^2$$
$$99(x^2 – y^2) =$$
$$99(x + y)(x – y) =$$
$$9 \cdot 11 \cdot (x + y) \cdot (x – y)$$

כדי שהביטוי $9 \cdot 11 \cdot (x + y) \cdot (x – y)$ יהיה ריבוע של מספר שלם, ייתכנו שלושה מקרים:

- שתי הספרות שוות. כי אז המכפלה היא 0 שהוא ריבוע של מספר שלם.
- $(x + y = 11)$ וגם $(x – y = 4)$. לא ייתכן כי הפתרונות אינם מספרים שלמים.
- $(x + y)(x – y) = 11$

  11 הוא מספר ראשוני מכאן: $(x – y = 1)$ וגם $(x + y = 11)$

  לכן $x = 6$, $y = 5$ והמספר הוא 65.

  ואכן $65^2 – 56^2 = 9 \cdot 121 = 33^2$

למסיימים

1. a ו- b הם שני **מספרים טבעיים שונים**.

   א. מה גדול יותר: ריבוע הסכום או סכום הריבועים? בכמה?

   כלומר, מה גדול יותר: $(a + b)^2$ או $a^2 + b^2$?

   נסחו השערה והוכיחו אותה.

תשובה: בודקים מספר דוגמאות.

ההשערה: ריבוע הסכום גדול יותר ב- $2ab$.

הוכחה: ריבוע הסכום הוא $(a + b)^2 =$

$$a^2 + b^2 + 2ab =$$
$$\underbrace{(a^2 + b^2)}_{\text{סכום הריבועים}} + 2ab$$

לכן, $(a + b)^2 > a^2 + b^2$

ב. מה גדול יותר: ריבוע ההפרש של שני המספרים או הפרש הריבועים של שני המספרים?

כלומר, מה גדול יותר: $(a-b)^2$ או a^2-b^2? a ו- b מספרים טבעיים שונים.

תשובה: ההשערה הראשונה של התלמידים היא שריבוע ההפרש קטן יותר " כי הוא מספר חיובי תמיד. אפשר להציג בפני התלמידים דוגמאות של מקרים שבהן ריבוע ההפרש גדול יותר, ומקרים שבהן ריבוע ההפרש קטן יותר ולהכליל.

מבחינים בין שני מקרים:

- אם $a < b$ אז $(a-b)^2 > 0$ ולעומת זאת $a^2-b^2 < 0$. כלומר, $(a-b)^2 > a^2-b^2$.
- אם $a > b$ אז

$$(a-b)^2 =$$
$$a^2+b^2-2ab =$$
$$(a^2-b^2) - (2ab-2b^2) =$$
$$\underbrace{(a^2-b^2)}_{\text{הפרש הריבועים}} - 2b(a-b) =$$

(a^2-b^2) הוא מספר חיובי, וגם $2b(a-b)$ הוא מספר חיובי.

מכאן, $(a-b)^2 < a^2-b^2$

סעיף נוסף ל**מתקדמים**: a ו- b הם שני **מספרים שלמים**. מה גדול יותר: ריבוע הסכום או סכום הריבועים?

תשובה: אם a ו- b הם מספרים שלמים, אז מבחינים בשלושה מצבים:

- אם $a \cdot b > 0$ (a ו- b שניהם מספרים חיוביים או שניהם מספרים שליליים) אז $(a+b)^2 > a^2+b^2$
- אם $a \cdot b = 0$ ($a = 0$ או $b = 0$) אז $(a+b)^2 = a^2+b^2$
- אם $a \cdot b < 0$ ($a > 0$ וגם $b < 0$ או $a < 0$ וגם $b > 0$) אז $(a+b)^2 < a^2+b^2$

לסיכום

- מתייחסים לשאלת הפתיחה + שאלה 1 ודנים במשמעות של הגינות או אי-הגינות של משחק.
- מתייחסים לקשיים שמעלים התלמידים אודות הפעילות בשיעור.
- בודקים ביחד עם התלמידים את הקשרים בין הביטויים בשאלות השונות ודנים בהם.
- מתייחסים לפתרונות של התלמידים ודנים בדרכי פתרון שונות.
- דנים בהבדל בין שימוש בדוגמאות לגילוי חוקיות ובין ההוכחה הכללית הדרושה להצדקת הטענה. מדגישים כי הוכחת טענה באופן כללי משמעותה שהטענה נכונה עבור כל המקרים הפרטיים.