יחידה 5: שימושים באלגברה

5.1 מכפלה השווה לסכום

מטרות

- הפעלת משימת חקר תוך יישום טכניקות אלגבריות, ייצוגים שונים ותחומים שונים של מספרים
- ביסוס ויישום של הטכניקות האלגבריות שנלמדו
- הבנת הערך המוסף של מתן תשובות על-סמך ייצוגים שונים
- שימוש בדוגמאות פרטיות לגילוי הכללות
- שימוש באלגברה להנמקה/הוכחת חוקיות.

פתיחה

מציגים את משימת הפתיחה ומבקשים מן התלמידים לזהות שוויונות נכונים.

המורה אוסף ומציג על הלוח דוגמאות נוספות המתאימים לשוויונות הנכונים. (אפשר לבקש מכל קבוצה של כארבעה תלמידים להציג דוגמאות על הלוח)

דנים בהצעות. כדאי לבחור לדיון בהצעה "שרואים" בה את המבנה, בדומה ל- $101+(1+\frac{1}{100})=101\cdot(1+\frac{1}{100})$

פתרונות והערות

המשימות המרכזיות בפעילות זו הן משימות 3 ו-4.

1. א. $a+(1+\frac{1}{a-1})=a\cdot(1+\frac{1}{a-1})$

ב. דוגמה להוכחה: אפשר לפשט את שני האגפים ולקבל בכל אגף: $\frac{a^2}{a-1}$

ג. 1 (ביטוי לא מוגדר)

2. א. $x+y=x\cdot y$

ב. $y=\frac{x}{x-1}\quad x\neq 1$

ג. במשימה 1 מדובר במספר שלם (המספר השני לא חייב להיות שלם). ההרחבה היא בבחירת המספר הראשון, מהמספרים השלמים לכל המספרים.

.3 א. אם אחד המספרים הוא $5\frac{1}{2}$ השני הוא $1\frac{2}{9}$

ב. שני המספרים לא חייבים להיות חיוביים. כי אם $x<0$ אז $\frac{x}{x-1}>0$ כיון שהמונה והמכנה שליליים.

התנאי לקבלת שני מספרים חיוביים: $x > 1$, נקבל $y=\frac{x}{x-1}>1$ כי גם המונה וגם המכנה חיוביים.

ג. שני המספרים לא יכולים להיות שליליים. כי אם $x<0$ אז $y=\frac{x}{x-1}>0$ (המונה והמכנה שליליים).

ד. כן, שני המספרים יכולים היות בין 1– ל- 1. דוגמה: $-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

ה. $x\neq 1$

.4 א. קבלת הפונקציה בכתיב אלגברי $(x\neq 1)$:

$$x\cdot y=x+y$$
$$x\cdot y-y=x$$
$$y(x-1)=x$$
$$y=\frac{x}{x-1}$$

ניתן לפתח את הביטוי האלגברי כך: $y=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$.

בייצוג כזה, תלמידים שלמדו על אסימפטוטות, יוכלו לזהות אותן בקלות.

ב. במשימה 3 תשובה לסעיף א קשה לקרוא מהגרף.

על סעיפים ב, ג, ה נוח מאד לענות בעזרת הגרף.

בסעיף ד קל לראות שיש זוגות כאלה, קשה לקרוא מהגרף שיעורים מתאימים לנתינת דוגמה.

.5 מהגרף קל לראות:

- סימטריה בין x ל- y. ציר הסימטריה של הפונקציה $y=x$
- אם $x > 1$ גם $y > 1$, כאשר x קרוב יותר ל- 1, y גדל מאד. כאשר y קרוב יותר ל- 1, x גדול מאד.
- עבור $0 < x < 1$, y שלילי, כאשר x מתקרב ל- 1 y קטן מאד.

  עבור x שלילי $0 < y < 1$, כאשר x קטן מאד y קרוב יותר ל- 1.
- הזוגות השלמים היחידים הם: 2 ו- 2, 0 ו- 0.

.6 כן, $\frac{x^2}{x-1}=x+\frac{x}{x-1}$ וגם $\frac{x^2}{x-1}=x\cdot\frac{x}{x-1}$

.7 המשוואה $(x-1)(y-1)=1$ שקולה למשוואה: $xy-x-y+1=1$

כלומר, שקולה ל- $x\cdot y=x+y$

דוגמאות לתכונות שניתן להסיק מהייצוג:

- המספרים $x-1$ ו- $y-1$ הם מספרים הופכיים.

- השוויון לא קיים עבור $x = 1$ או $y = 1$ (כי אין הופכי ל- 0)
- עבור $x > 1$ גם $y > 1$, כאשר x גדל מאד y מתקרב לאחד, וכאשר x מתקרב ל- 1 y גדל מאד.

- יש שני פתרונות שלמים:

שני המספרים טבעיים: $x = 2$, $y = 2$ מתקבל כאשר $x-1=1$, $y-1=1$

שני המספרים שווים לאפס: $x = 0$, $y = 0$ מתקבל כאשר $x-1=-1$, $y-1=-1$

שומרים על כושר

1. דוגמאות:

א. $(a^2+4)(a+2)(a-2)$, $(a^2+4)(a^2-4)$

ב. $2a(a-1)$

ג. $6a^3(\frac{3}{a}+2)$ בתנאי ש- $a \neq 0$, $9a^2(\frac{4}{3}a+2)$

2. א. x^4-16 , $x \neq 0$

ב. x^4-16

ג. x^4-18x^2+81

הפתרון לשלושה מספרים: $1+2+3=1\cdot2\cdot3$

בהנחה שמותר לחזור על אותו מספר בפתרון, נקבל לארבעה מספרים: $1+1+2+4=1\cdot1\cdot2\cdot4$

לחמישה מספרים שלושה פתרונות: $1+1+1+2+5=1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot5$

$1+1+1+3+3=1\cdot1\cdot1\cdot3\cdot3$ $\quad$ $1+1+2+2+2=1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot2$

http://www.chidot.co.il/2010-10-24-01-58-58/-1/394-2013-09-26-09-17-01

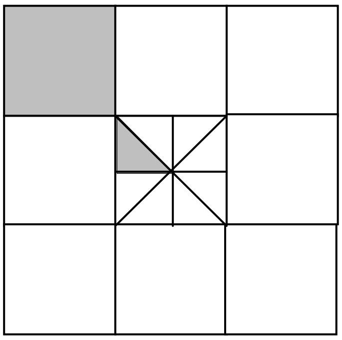
הערה: אם דורשים שהמספרים יהיו **שונים**, נקבל פתרון לשלושה מספרים בלבד.

אם נרחיב את קבוצת המספרים מהטבעיים לשלמים (או לכל המספרים), נקבל לכל מספר של מספרים **אינסוף פתרונות**. בכל פתרון כזה, אחד המספרים הוא **אפס**, **וסכום** המספרים **השליליים נגדי לסכום** המספרים **החיוביים**.

במקרה כזה הסכום והמכפלה **שווים ל- 0** (המכפלה 0 כי אחד הגורמים 0. הסכום 0 כי הוספנו ל- 0 סכומים של מספרים נגדיים)

דוגמה: 118 ,0 ,-18 ,-51 -49

למסיימים



1. השרטוט משמאל מראה כי $\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{8}$

א. תארו שיקולים על סמך השרטוט שיכולים להוביל למסקנה הזאת.

ב. בדקו את הטענה מבחינה חישובית.

ג. שרטטו שרטוט מתאים לשוויון: $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

ד. תנו דוגמה לשוויון דומה המשתמש בשברים בעלי מכנה גדול מ- 50. בדקו אותם מבחינה חישובית.

ה. הכלילו עבור השבר $\frac{1}{n}$, והוכיחו את החוקיות שתיארתם בהכללה.

תשובות אפשריות

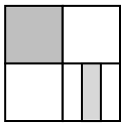
1. א. החלק הצבוע הוא $\frac{1}{9}$ מהריבוע הגדול (אחד מ- 9 ריבועים קטנים) ועוד $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}$ ($\frac{1}{8}$ של ריבוע שהוא $\frac{1}{9}$ של הריבוע הגדול). זהו תאור של אגף שמאל בשוויון.

מצד שני, בריבוע הגדול יש 8 ריבועים **לא מחולקים** שאחד צבוע , כלומר $\frac{1}{8}$ מהריבועים.

בנוסף יש ריבוע אחד מחולק ל 8 משולשים שאחד צבוע, כלומר $\frac{1}{8}$ מהמשולשים. כלומר החלק הצבוע הוא $\frac{1}{8}$ מהריבוע הגדול. זהו תאור של אגף ימין בשוויון.

ב. $\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{72}+\frac{1}{72}=\frac{9}{72}=\frac{1}{8}$

ג. לדוגמה:



ד. לדוגמה: $\frac{1}{101}+\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{101}=\frac{1}{100}$

ה. הכללה: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}$ $(n\neq 1\ ,\ n\neq 0)$

הוכחה: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}$

לסיכום

- אוספים מהתלמידים מסקנות על המספרים שסכומם שווה למכפלתם
- דנים בתרומה של כל אחד מהייצוגים לקבלת המסקנות
- קושרים בין הפתרון למשימה 7 עבור פתרון טבעי ל**שני מספרים שסכומם שווה למכפלתם**, (2 , 2) והפתרון של **החידה**, בה הרחבנו את החיפוש ל**שלושה** מספרים ויותר (3 , 2 , 1).