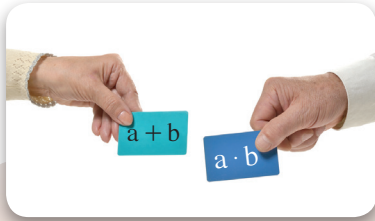


יחידה 5: שימושים באלגברה

5.1 מכפלה השווה לסכום



סמנו את השוויונות הנכונים.

$$9 + 1\frac{1}{8} = 9 \cdot 1\frac{1}{8}$$

$$3 + 1\frac{1}{2} = 3 \cdot 1\frac{1}{2}$$

$$10 + 1\frac{1}{11} = 10 \cdot 1\frac{1}{11}$$

$$5 + 1\frac{1}{6} = 5 \cdot 1\frac{1}{6}$$

$$7 + 1\frac{1}{7} = 7 \cdot 1\frac{1}{7}$$

$$4 + 1\frac{1}{3} = 4 \cdot 1\frac{1}{3}$$

מהי התכונה המשותפת לכל זוגות המספרים בשוויונות הנכונים?
רשמו שלושה זוגות מספרים נוספים בעלי אותה תכונה שמכפלתם שווה לסכומם.

נחקור זוגות מספרים x ו- y שמכפלתם שווה לסכומם.

1. a הוא מספר שלם.

א. השלימו בהתאם לשוויונות הנכונים שבפתיח: $a + \underline{\hspace{2cm}} = a \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

ב. הוכיחו כי השוויון אכן מתקיים.

ג. יש מספר שעבורו השוויון אינו מתקיים. מהו?

2. x ו- y הם שני מספרים שמכפלתם שווה לסכומם.

א. תרגמו את המשפט בעברית לכתיב מתמטי.

ב. הביעו את y בעזרת x .

ג. מה ההבדל בין זוגות המספרים המקיימים את השוויון במשימה 1 לעומת אלה המקיימים אותו במשימה זו?

3. x ו- y הם שני מספרים שמכפלתם שווה לסכומם.

ענו על השאלות הבאות בעזרת אחד מהייצוגים ממשימה 2. שקלו בכל פעם מהו הייצוג המתאים.

א. אחד המספרים הוא $5\frac{1}{2}$. מהו המספר השני?

ב. האם שני המספרים חייבים להיות חיוביים? אם כן, מדוע? אם לא, מה התנאי שיהיו חיוביים?

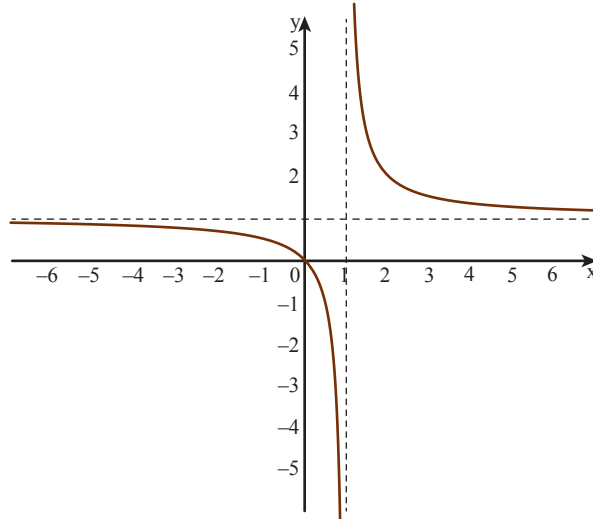
ג. האם שני המספרים יכולים להיות שליליים? אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, תנו דוגמה לזוג מספרים כזה.

ד. האם ייתכן ששני המספרים יהיו מספרים בין -1 ל-1?

אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, תנו דוגמה לזוג מספרים כזה.

ה. האם x יכול להיות כל מספר?

4. x ו- y הם שני מספרים שמכפלתם שווה לסכומם.
 לפניכם גרף הפונקציה המתאימה למספר האחד את המספר השני.
 א. רשמו את הפונקציה בכתב אלגברי.
 ב. בדקו אם אפשר לענות בעזרת הגרף על הסעיפים במשימה 3.



5. כתבו טענות נוספות שאפשר ללמוד מן הגרף. השתמשו במילים מן הסל.



6. רשמו ביטוי אלגברי למכפלת המספרים וביטוי אלגברי לסכום המספרים באמצעות x בלבד.
 האם קיבלתם ביטויים זהים?
7. הראו כי המשוואה $x + y = x \cdot y$ שקולה למשוואה $(x - 1)(y - 1) = 1$.
 אילו מן התכונות הקודמות ניתן להסיק בקלות מייצוג אלגברי זה?



קריקטורה אמריקנית משנת 1900 המותחת ביקורת על הקונגרס אשר מתחבט כחמורו של בורידן בין בניית תעלת פנמה לבין בניית תעלת ניקרגואה.

המשוואה $x + y = x \cdot y$, כמו גם המשוואה $(x - 1)(y - 1) = 1$ הן מסוג המשוואות הסימטריות. אם נחליף את מקום המשתנים - המשוואה לא תשתנה. כמו כן אם נבטא את y כפונקציה של x ואת x כפונקציה של y - נקבל אותו ביטוי. קיומה של סימטריה בבעיות אלגבריות או גיאומטריות מאפשרת להגיע להשערות שקשה להגיע אליהן בהיעדר סימטריה. למעשה, פועל כאן עיקרון חשוב שניסוחו: "אם אין סיבה מספקת להבחנה, לא תהיה הבחנה."

עיקרון זה עתיק מאוד ונוסח בצורת משל על-ידי ג'אן בורידן (Jean Buridan 1300-1358), פרופסור לפילוסופיה באוניברסיטת פריז. העיקרון ידוע בשם "החמור של בורידן". לפני החמור היו מונחות שתי ערמות קש. שתיהן נראו זהות לחלוטין. לכן לחמור לא הייתה שום סיבה סבירה לגשת לאחת מהן. הסוף הטרגי היה כי החמור מת מרעב.



שומרים על כושר

1. כתבו את הסכומים הבאים כמכפלות בדרכים שונות.

א. $a^4 - 16$

ב. $a^2 - 1 + (a - 1)^2$

ג. $18a^2 + 12a^3$

2. כתבו את המכפלות הבאות כסכומים.

א. $x^2(x^2 - \frac{16}{x^2})$
 $x \neq 0$

ב. $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

ג. $(x - 3)^2(x + 3)^2$



חידה

- האם יש שלושה מספרים טבעיים המקיימים את השוויון: $a + b + c = a \cdot b \cdot c$ אם כן, מצאו שלשה או שלשות כאלה. **שימו לב**, חלק מהמספרים בכל שוויון כזה יכולים להיות זהים.
- האם יש ארבעה מספרים טבעיים המקיימים שוויון דומה (כלומר, סכומם שווה למכפלתם)? אם כן, מצאו רביעייה או רביעיות כאלה.
- האם יש חמישה מספרים טבעיים המקיימים שוויון דומה? אם כן, מצאו חמישייה או חמישיות כאלה.