4.5 לוחות משחק

מטרות

- שימוש באלגברה ככלי להכללה והצדקה.
- קישור בין ייצוגים שונים: ציורי, מספרי, אלגברי וגרפי.
- זיהוי, הכללה והנמקה של חוקיות בסיטואציה מתמטית.
- ביסוס ויישום של תרגום למשוואה ופתרון משוואות.

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (למשל, *Excel*).

פתיחה

מציגים את סיפור הפתיחה תוך כדי הצגת לוחות המשחק. מבקשים מהתלמידים להדגים ספירה של המשבצות מכל סוג בלוח.

פתרונות והערות

הפעילות ארוכה ומורכבת. ניתן לדלג על שאלות מורכבות מבלי שיפגע הרצף. מאידך אפשר לפרוס את הפעילות על יותר מ- 90 דקות. הפעילות עוסקת בחוקיות על לוחות משחק. השלבים בפעילות:

- סופרים על לוחות משחק נתונים את מספר המשבצות מסוגים שונים שבלוח ומשלימים בטבלה.
- מוצאים חוקיות.
- מתרגמים את החוקיות לביטויים אלגבריים – הכללה.
- חוקרים את החוקיות דרך פתרון משוואות ואי-שוויונות.
- מקשרים עם גרפים

1. א. ממלאים את הטבלה. בשלב הראשון סופרים את מספר המשבצות מכל סוג שבכל לוח משחק, ומכלילים.

אם תלמידים מתקשים להגיע להכללה בעמודות השונות שבטבלה, מאפשרים להם לשרטט לוחות משחק נוספים ולספור.

השיטה בה משתמשים לספירת המשבצות מכל סוג מסייעת להכללה.

מספר המשבצות בריבוע הפנימי	מספר המשבצות במסגרת הפנימית	מספר המשבצות במסגרת החיצונית	מספר המשבצות (בסך הכול)	גודל לוח המשחק
0	4	12	16	4 x 4
1	8	16	25	5 x 5
4	12	20	36	6 x 6
9,216	388	396	10,000	100 x 100
$(n-4)^2$	$4(n-3)$	$4(n-1)$	n^2	n x n

ב. נעזרים בפישוט באמצעות חוק הפילוג ונוסחאות הכפל המקוצר.

הפישוט מאפשר לבדוק נכונות הביטויים האלגבריים שנרשמו בכל העמודות בטבלה.

$$(n-4)^2 + 4(n-3) + 4(n-1) =$$

$$n^2 - 8n + 16 + 4n - 12 + 4n - 4 = n^2$$

2. נעזרים בתרגום למשוואות ובפתרונן כדי למצוא קשרים בין מספרי המשבצות מסוגים שונים, עבור מקרים פרטיים של לוחות משחק.

בודקים אם הפתרון שמתקבל מהמשוואה מתאים לתנאים המגבילים, וכן מקיים את התנאים שבשאלה.

א. המשוואה: $4(n-1) = (n-4)^2$

$$4n - 4 = n^2 - 8n + 16$$

$$n^2 - 12n + 20 = 0$$

פתרונות המשוואה: $n = 2$ או $n = 10$

התנאי המגביל הוא $n \geq 4$, לכן הפתרון המתאים הוא $n = 10$.

כלומר, מידות הלוח הם 10 x 10.

ואכן מתקיים: $4 \cdot 9 = 6^2$.

ב. המשוואה: $4(n-3) = (n-4)^2$

$$4n - 12 = n^2 - 8n + 16$$

$$n^2 - 12n + 28 = 0$$

למשוואה הריבועית אין פתרון שהוא מספר טבעי, לכן אין לוח משחק שבו מספר המשבצות במסגרת הפנימית שווה למספר המשבצות בריבוע הפנימי.

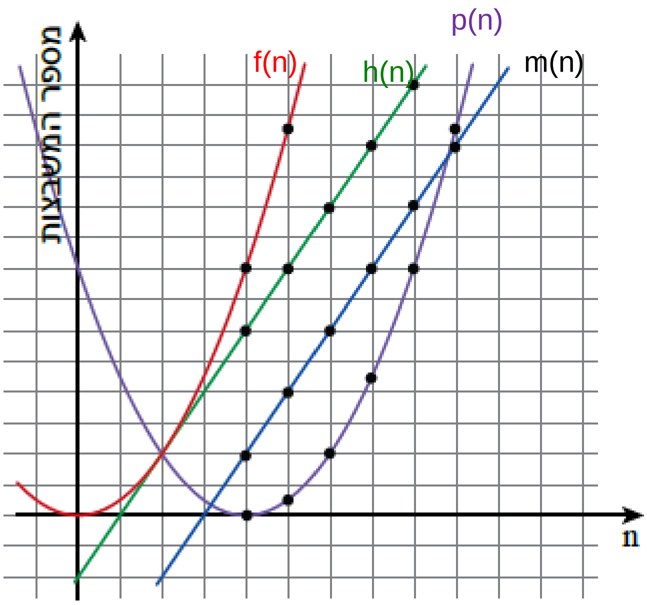
3. א. אפשר להתאים פונקציה לגרף בשתי דרכים אפשריות:

- חישוב שיעורי y בייצוג האלגברי של כל פונקציה עבור ערך x מסוים (למשל $x = 4$), והשוואה לפי סדר הגודל של שיעורים אלה.
- זיהוי התכונות של כל אחת מהפונקציות דרך הייצוג האלגברי שלה.

לפני ההתאמה רצוי לרשום לכל פונקציה את הייצוג האלגברי המתאים לה.

$f(n) = n^2$ $\quad h(n) = 4(n-1)$ $\quad m(n) = 4(n-3)$ $\quad p(n) = (n-4)^2$

התחום של כל אחת מהפונקציות הוא $n \geq 4$, n מספר טבעי.



ב. - ג. מעודדים את התלמידים למצוא כמה שיותר קשרים בין הפונקציות.

דוגמאות לקשרים שונים והמשמעות שלהם מבחינת סוגי המשבצות:

- h(n) ו- m(n) הן שתי פונקציות קוויות שיש להן אותו שיפוע, לכן הגרפים שלהן הם ישרים מקבילים. מזהים את הקשר מהייצוג האלגברי של הפונקציות וכן מתוך הייצוג בגרפי.

משמעות הקשר: בכל לוח, ההפרש בין מספר המשבצות שבמסגרת החיצונית למספר המשבצות שבמסגרת הפנימית הוא קבוע. הגדלת המימד של הריבוע ב- 1, מגדילה את מספר המשבצות בכל אחת משתי המסגרות ב- 4.

- $h(n) – m(n) = 8$. אפשר לזהות מהייצוג האלגברי וגם מהייצוג הגרפי.

משמעות הקשר: בכל לוח, מספר המשבצות שבמסגרת החיצונית גדול ב- 8 ממספר המשבצות שבמסגרת הפנימית.

- $f(n – 4) = p(n)$. אפשר לזהות מהייצוג האלגברי וגם מהייצוג הגרפי. גרף הפונקציה p(n) הוא הזזה ימינה של גרף הפונקציה f(n) ב- 4 יחידות.

משמעות הקשר: בלוח משחק שמידותיו n x n מספר המשבצות בריבוע הפנימי שווה למספר המשבצות הכולל של לוח משחק שמידותיו $(n – 4) x (n – 4)$.

- $h(n) + m(n) + p(n) = f(n)$ מזהים מתוך הקונטקסט הויזואלי-גאומטרי ומתוך הביטויים האלגבריים.

משמעות הקשר: בכל לוח, הסכום של מספר המשבצות שבמשבצת החיצונית ומספר המשבצות שבמשבצת הפנימית ומספר המשבצות שבריבוע הפנימי שווה למספר המשבצות בלוח.

- $p(n) < m(n)$ עבור הלוחות הראשונים (מלוח 4 x 4 עד לוח 8 x 8), אבל $p(n) > m(n)$ עבור לוחות גדולים יותר. אפשר לזהות מהייצוג הגרפי.

משמעות הקשר: עד לוח משחק שמידותיו 8 x 8 מספר המשבצות בריבוע הפנימי קטן ממספר המשבצות במסגרת הפנימית. עבור לוחות גדולים יותר מתקבל שמספר המשבצות בריבוע הפנימי גדול ממספר המשבצות במסגרת הפנימית.

- $p(n) \neq m(n)$ לכל n טבעי. אפשר לזהות מהייצוג הגרפי.

משמעות הקשר: אין לוח משחק שבו מספר המשבצות בריבוע הפנימי שווה למספר המשבצות במסגרת הפנימית.

4. אפשר לפתור את השאלה בדרכים שונות:

- פתרון באמצעות **ניסוי וטעייה**: בודקים לוחות בגדלים שונים. בפתיחה משורטטים לוחות עד $n = 7$, מנסים עבור $n = 8$ ומקבלים שבריבוע הפנימי יש 16 משבצות, ובמסגרת הפנימית 20 משבצות. כלומר, מספר המשבצות בריבוע הפנימי **קטן** ממספר המשבצות שבמסגרת הפנימית.

  עבור $n = 9$ מקבלים שבריבוע הפנימי יש 25 משבצות, ובמסגרת הפנימית 24 משבצות. כלומר, מספר המשבצות בריבוע הפנימי **גדול** ממספר המשבצות שבמסגרת הפנימית.

  לכן, הלוח הקטן ביותר שבו מספר המשבצות בריבוע הפנימי גדול ממספר המשבצות במסגרת הפנימית הוא בגודל 9 x 9.

- פתרון באמצעות **האלגברה**: רושמים אי-שוויון אלגברי מתאים ופותרים.

$$(n-4)^2 > 4(n-3)$$

$$n^2 - 8n + 16 > 4n - 12$$

$$n^2 - 12n + 28 > 0$$

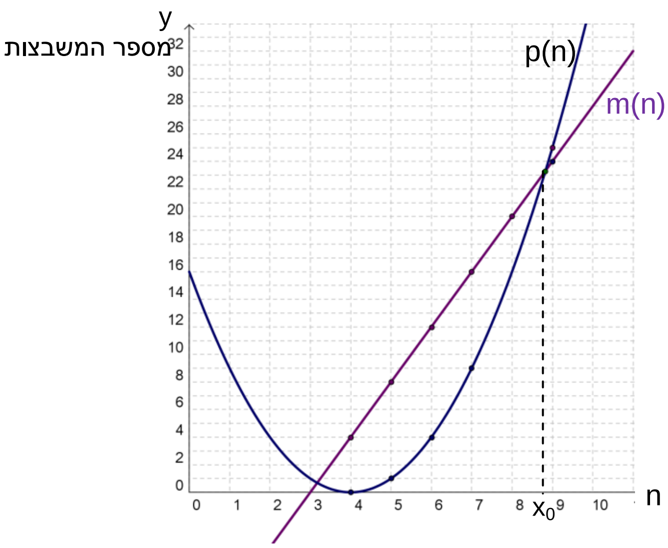
פתרון האי-שוויון: $n > 8.83$ או $n < 3.17$

תחום הבעיה הוא $n \geq 4$, n מספר טבעי, לכן המספר הטבעי הקטן ביותר המקיים את התנאי הוא $n = 9$.

- פתרון באמצעות **הגרף**: מתבוננים בגרפים של הפונקציות $p(n)$ ו- $m(n)$.

  נסמן את שיעור ה- x של נקודת החיתוך ב- x_0. בנקודה זו מתקיים: $p(x_0) = m(x_0)$.

  בתחום $n > x_0$ מתקיים $p(n) > m(n)$.



5. מספר המשבצות שלא משורטטים עליהם עיגולים הוא: מספר המשבצות שבמסגרת החיצונית + מספר המשבצות בריבוע הפנימי.

מתרגמים למשוואה ופותרים: $4(n-1) + (n-4)^2 = 108$

$$4n - 4 + n^2 - 8n + 16 = 108$$

$$n^2 - 4n - 96 = 0$$

פתרון המשוואה שמתאים לתנאי הבעיה הוא $n = 12$.

כלומר, בלוח שמידותיו 12 x 12 מספר המשבצות שאינן מסומנות בעיגול הוא 108.

6. המשוואה: $4(n-1) + 4(n-3) + 4 = (n-4)^2$

לאחר פישוט: $n^2 - 16n + 28 = 0$

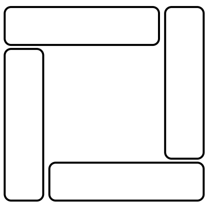
פתרונות המשוואה: $n = 2$ או $n = 14$.

הפתרון המתאים לתנאי הבעיה הוא $n = 14$. כלומר, מידות הלוח הן 14×14.

7. אפשר להיעזר בביטויים האלגבריים או ב"סיפור" כדי לקבוע נכונות הטענות וכדי לנמק.

א. נכון. מספר המשבצות שבמסגרת החיצונית $4(n-1)$ הוא כפולה של 4, לכן מתחלק תמיד ב- 4 ללא שארית.

אפשר להראות גם באמצעות החלוקה הבאה המתאימה לכל לוח:



ב. נכון. אם $4(n-1)$ הוא כפולה של 8 $\Leftarrow$ $(n-1)$ מייצג מספר זוגי. לכן $(n-3)$ הוא המספר הזוגי הקודם לו. לכן, $4(n-3)$ מתחלק ב- 8 ללא שארית.

ג. נכון. אם מספר המשבצות בלוח הוא זוגי $\Leftarrow$ n מספר זוגי (למעשה הוא מספר שמתחלק ב- 4), לכן $(n-1)$ הוא מספר אי-זוגי, ומכאן $4(n-1)$ אינו מתחלק ב- 8.

גם $(n-3)$ הוא מספר אי-זוגי, כלומר $4(n-3)$ אינו מתחלק ב- 8.

ד. נכון. אם מספר המשבצות בלוח כולו הוא זוגי $\Leftarrow$ n מספר זוגי (למעשה הוא מספר שמתחלק ב- 4), לכן גם $(n-4)$ הוא מספר זוגי $\Leftarrow$ $(n-4)^2$ הוא מספר זוגי.

ה. נכון. ההפרש $4(n-1) - 4(n-3) = 8$ הוא מספר קבוע ושווה ל- 8.

אפשר לנמק זאת גם באמצעות הגרפים המתאימים לפונקציות אלה. הגרפים הם ישרים מקבילים שהמרחק ביניהם קבוע ושווה ל- 8.

אפשר לנמק גם מבחינה גיאומטרית: כדי לעבור ממסגרת פנימית למסגרת חיצונית באותו לוח – צריך להוסיף שתי משבצות על כל צלע.

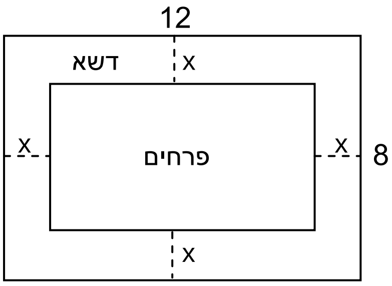
ו. לא נכון. $n^2 - (n-4)^2 = 8n - 16$. כלומר ההפרש בין מספר המשבצות בלוח כולו לבין מספר המשבצות בריבוע הפנימי תלוי ב- n, כלומר תלוי בגודל הלוח.

אפשר לנמק זאת גם מבחינה גיאומטרית: ההפרש הוא מספר המשבצות שבשתי המסגרות, ומספר זה הולך וגדֵל ככל שמימד הלוח גדֵל.

8. א. בגיליון אלקטרוני, התלמידים בונים טבלה (כמו בשאלה 1) עבור לוחות שמידותיהם 4×4 עד 20×20.

	A	B	C	D	E
1	גודל לוח המשחק	מספר המשבצות (בסך-הכל)	מספר המשבצות במסגרת החיצונית	מספר המשבצות במסגרת הפנימית	מספר המשבצות בריבוע הפנימי
2	4 x 4	16	12	4	0
3	5 x 5	25	16	8	1
4	6 x 6	36	20	12	4
5	7 x 7	49	24	16	9
6	8 x 8	64	28	20	16
7	9 x 9	81	32	24	25
8	10 x 10	100	36	28	36
9	11 x 11	121	40	32	49
10	12 x 12	144	44	36	64
11	13 x 13	169	48	40	81
12	14 x 14	196	52	44	100
13	15 x 15	225	56	48	121
14	16 x 16	256	60	52	144
15	17 x 17	289	64	56	169
16	18 x 18	324	68	60	196
17	19 x 19	361	72	64	225
18	20 x 20	400	76	68	256

ב. בעזרת המידע שמתקבל מהטבלה על מספרי המשבצות מן הסוגים השונים בלוחות השונים, התלמידים מחברים שאלות נוספות על לוחות המשחק ופותרים אותן.



1. נעזרים במשוואות כדי לענות על הסעיפים שבשאלה.

חשוב שהתלמידים יבדקו אם פתרון המשוואה מתאים לתנאי הבעיה, וכן שהפתרון מקיים את הקשר הנתון.

נסמן ב- x את רוחב מסגרת הדשא (במטרים).

התנאי על x: $0 < x < 4$.

שטח הגינה כולה: 96 מ"ר.

שטח ערוגת הפרחים $(12 - 2x)(8 - 2x)$ מ"ר.

שטח הדשא $(12 - 2x)(8 - 2x) - 96$ מ"ר. לאחר פישוט: $4x(10 - x)$.

א. המשוואה: $(12-2x)(8-2x) = \frac{1}{2} \cdot 4x(10-x)$.

לאחר פישוט: $x^2 - 10x + 16 = 0$

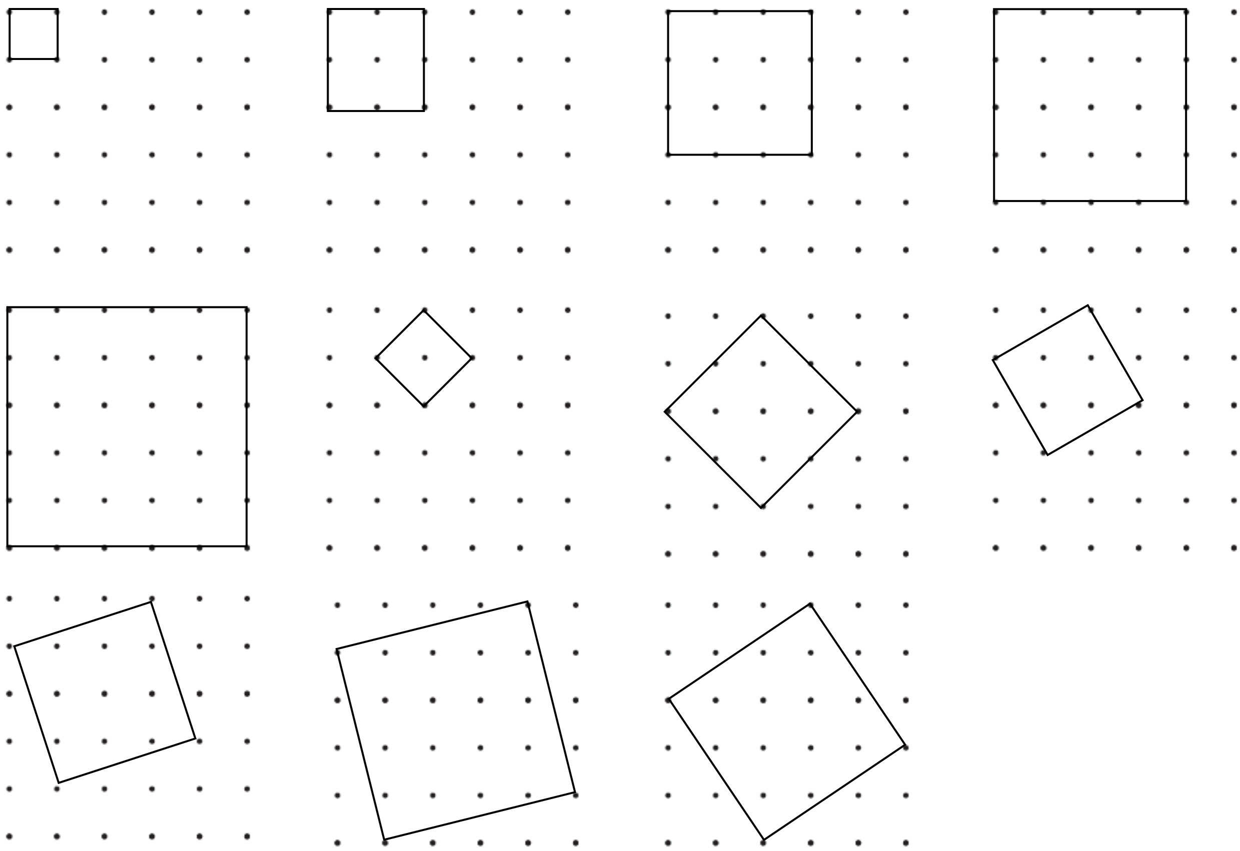
פתרון המשוואה המתאים לתנאי הבעיה הוא $x = 2$. כלומר, רוחב מסגרת הדשא המתאים למקרה זה הוא 2 מטרים. ואכן, במקרה זה, שטח ערוגת הפרחים 32 מ"ר, שטח הדשא 64 מ"ר.

ב. המשוואה: $4x(10 - x) = 0.6(12 - 2x)(8 - 2x)$

לאחר פישוט: $x^2 - 10x + 9 = 0$.

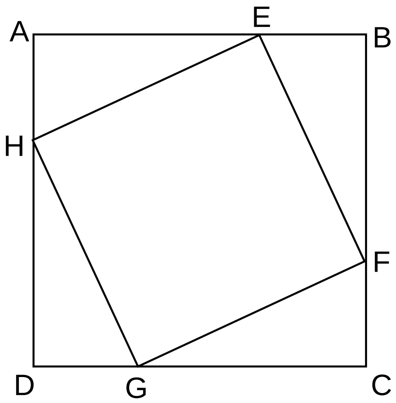
פתרון המשוואה המתאים לתנאי הבעיה הוא $x = 1$. כלומר, רוחב מסגרת הדשא המתאים למקרה זה הוא 1 מטר. ואכן, שטח הדשא 36 מ"ר, שטח ערוגת הפרחים 60 מ"ר ומתקיים: $36 = 0.6 \cdot 60$

על לוח מסמרים של 5 x 5 ניתן ליצור 11 ריבועים שונים במידותיהם (ראו ציורים).



למסיימים

1. בתוך ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ
   חסום ריבוע EFGH (ראו ציור).



א. הסבירו מדוע ארבעת המשולשים ישרי-הזווית
שבפינות חופפים.

תשובה: EF = FG (EFGH הוא ריבוע).

$\measuredangle B = \measuredangle C = 90°$

נסמן: $\measuredangle EFB = \alpha \Leftarrow \measuredangle CFG = \measuredangle BEF = 90 - \alpha$

המשולשים EBF ו- FCG חופפים לפי ז.צ.ז.

בצורה דומה מוכיחים את חפיפת יתר המשולשים.

ב. סמנו ב- x את אורך הקטע BF (בס"מ).

אילו ערכים מתאימים ל- x לפי תנאי הבעיה?

רשמו ביטוי אלגברי לשטח משולש ישר-זווית אחד.

רשמו ביטוי אלגברי לשטח הריבוע EFGH.

בדקו אם הביטויים האלגבריים שרשמתם עבור שטח הריבוע EFGH ושטחם של 4 המשולשים ישרי-הזווית מסתכמים לשטח הריבוע ABCD.

תשובה: התנאים המגבילים: $0 \le x \le 10$.

שטח משולש ישר-זווית אחד: $\frac{x(10-x)}{2}$ סמ"ר.

שטח הריבוע הפנימי: $100 - 4 \cdot \frac{x(10-x)}{2}$ סמ"ר.

$$4 \cdot \frac{x(10-x)}{2} + 100 - 2x(10-x) =$$

$$2x(10-x) + 100 - 2x(10-x) = 100$$

ג. האם ייתכן ששטח הריבוע EFGH יהיה 52% משטח הריבוע ABCD?

אם כן, מה ערכו של x? אם לא, הסבירו.

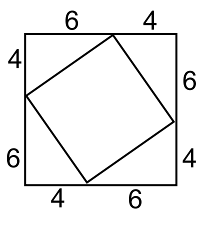
תשובה: המשוואה $100 - 2x(10-x) = 52$, לאחר פישוט: $x^2 - 10x + 24 = 0$

פתרונות המשוואה: $x = 4$ או $x = 6$.

שני הפתרונות מתאימים לתנאי הבעיה.

הערה: שני הפתרונות האלגבריים הם פתרונות סימטריים המייצגים את אותו המצב הגיאומטרי.

בכל פתרון, אורכי הניצבים של המשולשים ישרי-הזווית הם 4 ס"מ ו- 6 ס"מ.



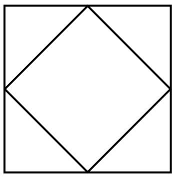
ד. האם ייתכן ששטח הריבוע EFGH יהיה 40% משטח הריבוע ABCD?

אם כן, מה ערכו של x? אם לא, הסבירו.

תשובה: המשוואה $100 - 2x(10-x) = 40$, לאחר פישוט: $x^2 - 10x + 30 = 0$

למשוואה אין פתרון, לכן לא ייתכן ששטח הריבוע הפנימי יהיה 40% משטח הריבוע ABCD.

שטח הריבוע הפנימי הקטן ביותר שניתן לחסום בריבוע הוא 50% משטח הריבוע הגדול.



ה. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הריבוע EFGH יהיה מינימלי?

מהו היחס בין שטח משולש ישר-זווית אחד לשטח הריבוע ABCD במקרה זה? הסבירו.

תשובה: פונקציה השטח היא $f(x) = 100 – 2x(10 – x)$

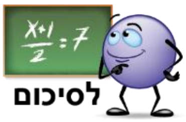
לאחר פישוט מתקבל $f(x) = 2x^2 – 20x + 100$

לפונקציה קדקוד מינימום בנקודה (50 , 5).

כלומר, עבור $x = 5$ שטח הריבוע הפנימי יהיה הקטן ביותר והוא 50 סמ"ר.

המשמעות: שטח הריבוע החסום המינימלי הוא חצי משטח הריבוע החוסם.

במקרה זה, שטח משולש ישר-זווית אחד הוא 12.5 סמ"ר והוא $\frac{1}{8}$ משטח הריבוע ABCD.



לסיכום

- מתייחסים לשאלה 1 ודנים בדרכים שונות לספירת המשבצות בשלושת האזורים של הלוח ובקשר שבין דרכים אלו והביטויים שהתקבלו כהכללה.

  אם התקבלו ביטויים הרשומים בצורה שונה (בגלל שיטת ספירה שונה) בודקים אם הביטויים זהים על-ידי הפעלת ההסכמים והחוקים.
- מציגים דרכי פתרון של שאלות 2, 5, 6 ובודקים.
- דנים בדרכים שונות לזיהוי הגרפים המוצגים בשאלה 3 ובקשרים שמצאו בין הפונקציות.
- משווים בין דרכי הפתרון השונות לשאלה 4 , ודנים ביתרונות ובחסרונות של כל דרך פתרון.
- בודקים את תשובות התלמידים לשאלה 7 תוך התייחסות לנימוקים שלהם.
- אם נשאר זמן, שומעים את השאלות הנוספות שהתלמידים חיברו על הסיטואציה.