4.4 הולכים לתיאטרון

- עיסוק בסיטואציית בעיה מן המציאות העוסקת בפונקציה ריבועית המוגדרת בחלקים.
- חיזוק הקשר בין המציאות לבין מודלים מתמטיים שביכולתם לסייע לקבלת החלטות כלכליות
- שימוש והעמקה בביטויים אלגבריים ובגרפים ובקשר ביניהם
- העמקת הטיפול בתחום הצבה המתאים לתוכן של בעיה
- פיתוח היצירתיות בחיבור בעיות המתאימות למציאות

תוכנה גרפית (למשל, *Geogebra*),

קוראים את הפתיח עם התלמידים ומוודאים שהבינו את הסיטואציה על-ידי שאלות מהסוג:
מה יהיה המחיר הכולל אם יבואו 50 תלמידים? מהו יהיה המחיר הכולל אם יבואו 120 תלמידים?
אחר-כך מבקשים מהתלמידים להתחיל ולחקור את השאלות שבפעילות, בזוגות או בקבוצות, ולמצוא אסטרטגיות של פתרון.

הפעילות עוסקת בסיטואציית בעיה שתרגומה למודל מתמטי הוא פונקציה המוגדרת בחלקים – חלקה קווית וחלקה ריבועית. הצבת x בפונקציה כזו, וכן מציאת ערך x כשנתון ערך של y חייבת להתחשב בחלק של התחום בו נמצא x. הפונקציה המתקבלת (המחיר הכולל של הכרטיסים בהתאם למספר התלמידים שיבואו להצגה) אינה מתאימה לחיים המציאותיים כי ההנחה הניתנת כשבאים להצגה מספר גדול של תלמידים, עלולה לגרום שמחיר כרטיס יהיה שלילי. התלמידים מתבקשים לתקן את הסיטואציה, ובהתאמה את הפונקציה, כדי שתתאים לחיי היום-יום.

1. בעמודה הימנית יש אפשרות נוספת: 60 תלמידים באו להצגה, ומחיר הכרטיס 50 ש"ח.

בעמודה השלישית מימין יש 100 אפשרויות.

300	*120*	*70*	115	85	מספר התלמידים שבאו להצגה
10	46	50	*47*	*50*	מחיר כרטיס בודד (בשקלים)
3,000	*5,520*	*3,500*	*5,405*	*4,250*	המחיר הכולל של הכרטיסים (בשקלים)

2. א. y = 50 x

ב. $0 < x \le 100$

3. א. y = x [50 – 0.2(x – 100)]

ב. הגבול התחתון למספר התלמידים המתאים למקרה זה הוא 100. יש לשער שיהיה גבול עליון למספר התלמידים שאחריו ההנחה שיקבלו תהיה גדולה מן הסכום שישולם לפני ההנחה. את הגבול הזה אפשר למצוא בדרך אלגברית או גרפית.

דרך אלגברית

0.2(x – 100) < 50

0.2x – 20 < 50

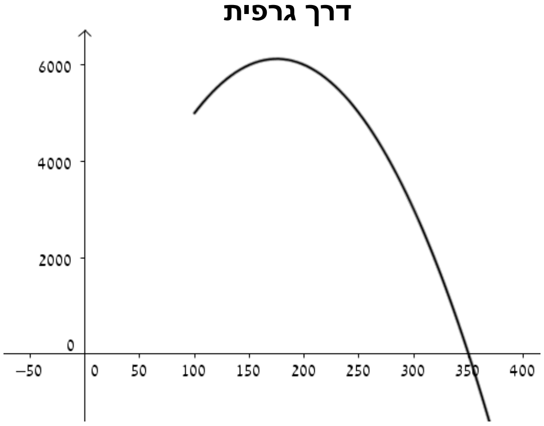
0.2x < 70

x < 350

לכן תחום ההצבה המתאים לתוכן הבעיה הוא

100 < x < 350

דרך גרפית

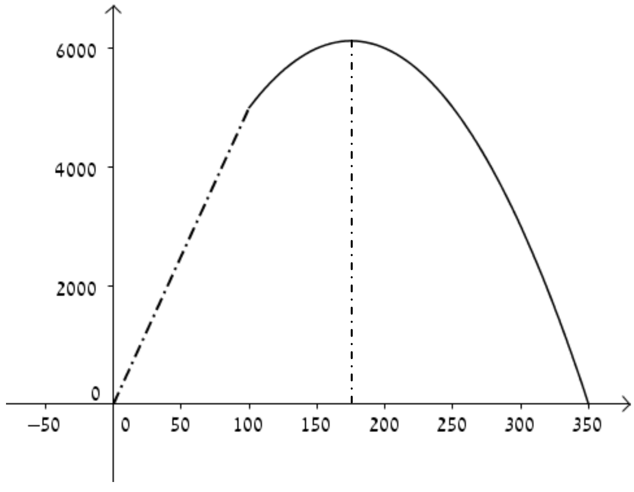


4. הפונקציה המבוקשת היא הפונקציה המשלבת את שתי הפונקציות שיצרנו במשימות 1 ו- 2

זוהי פונקציה המשלבת חלק של ישר וחלק של פרבולה.

$$f(x) = \begin{cases} 50x & 0 < x \le 100 \\ -0.2x^2 + 70x & 100 < x < 350 \end{cases}$$

5.



6. התשלום המקסימלי יתקבל בנקודת המקסימום של הפונקציה.

פתרון גרפי:

על-ידי הילוך על הגרף אפשר להסיק כי התשלום הגדול ביותר יתקבל עבור 175 תלמידים.

פתרון אלגברי:

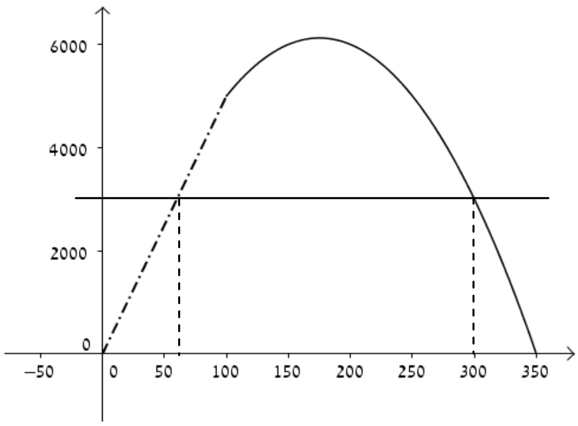
המקסימום של החלק הקווי מתקבל בנקודה שבה $x = 100$ וערכו 5,000.

המקסימום של החלק הריבועי מתקבל בנקודת הקודקוד $x = \frac{-70}{-0.4} = 175$

וערכו 6125 $(= -0.2 \cdot 175^2 + 70 \cdot 175)$ ערך זה גבוה יותר מן המקסימום של החלק הקווי.

לכן התשלום המקסימלי יתקבל עבור 175 תלמידים.

7. **פתרון גרפי**



מחפשים את נקודות החיתוך בין גרף הפונקציה והישר $y = 3{,}000$.

מתקבלות שתי נקודות. אחת על הישר והשנייה על הפרבולה.

עבור 60 תלמידים וגם עבור 300 תלמידים יתקבל תשלום כולל של 3,000 ש"ח.

פתרון אלגברי

נשווה כל אחד מחלקי הפונקציה ל-3000.

$$-2x^2 + 70x = 3000 \qquad 50x = 3000$$

$$x_1 = 50 \quad x_2 = 300 \qquad x = 60$$

$x_1 = 50$ אינו בתחום של חלק הפונקציה שבו $x > 100$, ולכן אינו מתאים כפתרון לבעיה.

לכן תשלום כולל של 3000 ש"ח יתקבל עבור 60 תלמידים, או 300 תלמידים. כלומר, לא ניתן לדעת בוודאות מה מספר התלמידים שהלכו להצגה תמורת תשלום זה.

8. לפי הסכם זה אם יבואו להצגה 350 תלמידים הם יקבלו את הכרטיסים בחינם. במשימה 3 קבענו לפי המצב הזה את התחום המתאים לתוכן הבעיה.

9. תיתכנה הצעות שינוי להסכם מסוגים שונים:

הצעה א

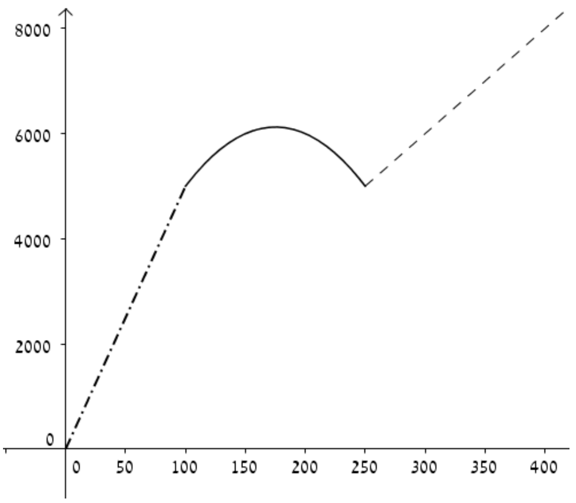
לפי הצעה זו, ההנחה תינתן ליותר מ- 100 אך לא ליותר מ- 250 תלמידים. על כל מספר גדול יותר של תלמידים יהיה המחיר לכרטיס שווה למחיר הכרטיס של התלמיד ה- 250.

לכן לפי הצעה זו, אם יוצאים לתיאטרון 250 תלמידים או יותר, גובה ההנחה יהיה 30 ש"ח $(150\cdot 0.2=)$, ולכן מחיר הכרטיס יהיה 20 שקלים.

הייצוג האלגברי של הפונקציה לפי הצעה א

$$f(x)=\begin{cases} 50x & 0<x\le 100 \\ -0.2x^2+70x & 100<x\le 250 \\ 20x & x>250 \end{cases}$$

הייצוג הגרפי של הפונקציה



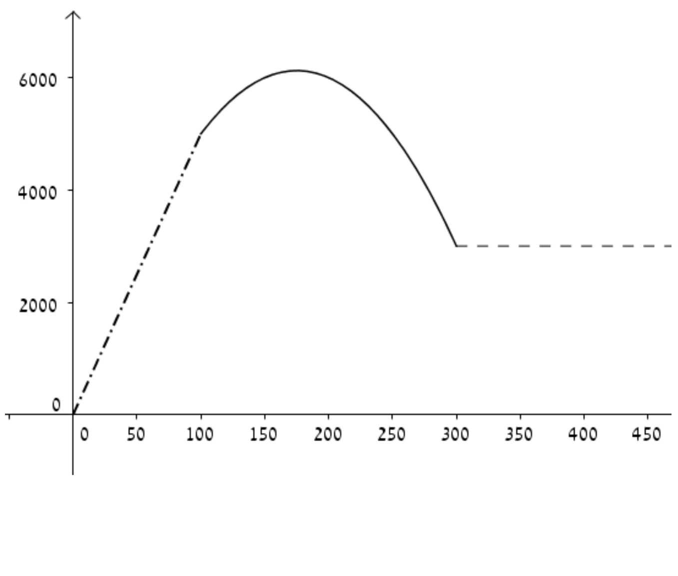
הצעה ב

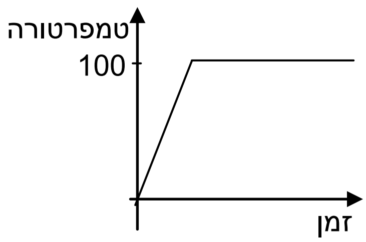
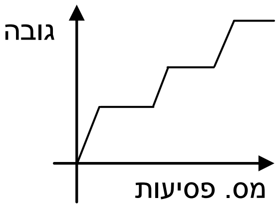
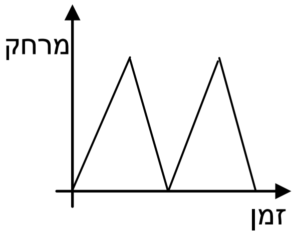
לפי הצעה זו, בדומה להסכם המקורי, המחיר לכרטיס עד 100 תלמידים יהיה 50 ש"ח. אם יבואו יותר מ- 100 תלמידים תינתן הנחה דומה להנחה שבהסכם המקורי, אבל התשלום הכולל לא יהיה פחות מ- 3,000 ש"ח.
המחיר הכולל עבור יותר מ- 100 תלמידים הוא 3,000 אם באים 300 תלמידים או יותר.

הייצוג האלגברי של הפונקציה לפי הצעה ב

$$f(x)=\begin{cases} 50x & 0<x\le 100 \\ -0.2x^2+70x & 100<x\le 300 \\ 3{,}000 & x>300 \end{cases}$$

הייצוג הגרפי של הפונקציה



		
סקיצה של הפונקציה המתאימה לזמן החימום, את טמפרטורת המים בקומקום.	סקיצה של הפונקציה המתאימה למספר הפסיעות של העולה לביתו שבקומה שלישית, את הגובה בו הוא נמצא לעומת הקרקע*.	סקיצה של הפונקציה המתאימה לזמן, את המרחק מנקודת המוצא של השוחה הלוך וחזור מספר בריכות.

* למרות שהגרף המשורטט הוא קו רציף, תחומה כולל רק מספרים טבעיים. (הסקיצה תלויה במבנה חדר המדרגות.)

שומרים על כושר

.1

$$f(x) = \begin{cases} -2x-6 & x<-3 \\ x^2-9 & -3 \le x \le 3 \\ -2x+6 & x>3 \end{cases}$$

א. מציבים כל מספר בביטוי המתאים לתחום שבו נמצא המספר.

$f(5) = -2 \cdot 5 + 6 = -4$ $\quad\quad$ $f(0) = 0^2 - 9 = -9$

$f(-1.5) = (-1.5)^2 - 9 = -6.75$ $\quad\quad$ $f(-3) = (-3)^2 - 9 = 0$

ב. משווים כל ביטוי ל- -5 ובודקים אם ערך x שהתקבל נמצא בתחום המתאים לביטוי.

$-2x-6=-5$	$x^2-9=-5$	$-2x+6=-5$
$x=-0.5$	$x=\pm 2$	$x=5.5$
ערך זה אינו נמצא בתחום המתאים.	ערכים אלו נמצאים בתחום המתאים	ערך זה נמצא בתחום המתאים

לכן עבור $x = 2 , -2 , 5.5$ ערך הפונקציה הוא -5

2. א. שלוש הנקודות נמצאות על הפרבולה. נקודת המפגש עם ציר ה- y היא (0 , 9–) ונקודות המפגש עם ציר ה- x הן (0 , 3) ו- (0 , 3–)

ב. על-סמך הגרף ועל סמך סעיף א.

למשוואה $f(x) = 1$ יש פתרון אחד. למשוואה $f(x) = -1$ יש שלושה פתרונות.

למשוואה $f(x) = -10$ אין פתרון. למשוואה $f(x) = 0$ יש שני פתרונות.

111 כרטיסים.

מספרי פלינדרום ארבע-ספרתיים נקבעים על-ידי שתי הספרות הראשונות – כי השתיים האחרונות הן "שיקוף" של ספרות אלה.

אם נסדר את כל (90) מספרי הפלינדרום הארבע-ספרתיים לפי הגודל, נקבל 9 קבוצות של 10 מספרי פלינדרום סמוכים, בעלי אותה ספרה ראשונה. למשל,

3993 , 3883 , 3773 , 3663 , 3553 , 3443 , 3333 , 3223 , 3113 , 3003

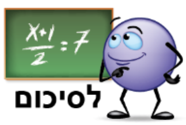
ההפרש בין כל שני מספרים סמוכים השייכים לאותה עשירייה, הוא תמיד 110. לכן במקרה כזה נקנו 111 כרטיסים, וזהו פלינדרום בעצמו.

במעבר בין עשיריות, נוצרת אפשרות נוספת למספרים פלינדרומים סמוכים כאשר המספר האחד הוא האחרון בעשירייה אחת והשני הוא הראשון בעשירייה הבאה. למשל, 3993 ו- 4004. במקרים כאלה ההפרש בין זוג מספרי פלינדרום סמוכים הוא 11. כלומר נקנו 12 כרטיסים ומספר זה אינו פלינדרום.

לכן האפשרות היחידה למספר הכרטיסים (או התלמידים) הוא 111, למרות שקיימות אפשרויות רבות למספרים סידוריים הרשומים על הכרטיסים.

למסיימים

1. התחלפו עם קבוצה אחרת בהצעה שלכם למשימה 8.
   חקרו את ההצעה ובדקו אם היא הגיונית, ולמי היא מיטיבה.
   שאלו מספר שאלות על הסיטואציה החדשה וענו עליהן.



לסיכום

- בודקים אם התלמידים התייחסו באופן נכון לתחום ההצבה המתאים לתוכן הבעיה
- מציגים את ההצעות השונות של התלמידים למשימה 8. שואלים שאלות על כל הצעה