

### 4.3 שיפור ציון



- עיסוק בסיטואציית בעיה מן המציאות שתרגומה למודל מתמטי הוא הרחבה של פונקצית השורש ריבועי.
- שימוש והעמקה בביטויים אלגבריים ובגרפים ובקשר ביניהם



תוכנה גרפית (Geogebra).



קוראים את הפתיח עם התלמידים ופותרים ביחד בעל-פה משימה 1. משימה זו נועדה להכיר או להזכיר לתלמידים את פונקצית השורש ולהדגיש כי אם  $x$  מספר אי-שלילי אז  $(\sqrt{x})$  הוא מספר יחיד (אי-שלילי) ולא שני מספרים נגדיים. בהמשך מבקשים מהתלמידים להתחיל ולחקור את השאלות.



- הפעילות עוסקת בסיטואציית בעיה שניתנת לתרגום לפונקציות המתבססות על פעולת השורש ריבועי. בפעילות יש מספר מעגלים.
- מעגל ראשון** – הכרות ראשונית עם הסיטואציה העלאת השערות ופתרון בדרכים אינטואיטיביות ובניסוי וטעיה.
- מעגל שני** – התייחסות לפונקצית הציון המשופר וניסיון לענות על אותן שאלות בדרך אלגברית.
- מעגל שלישי** – התייחסות לפונקצית הציון המשופר וניסיון לענות על אותן שאלות בדרך גרפית.
- מעגל רביעי** – התייחסות לפונקצית השיפור בציון וניסיון לענות על אותן שאלות בדרך גרפית ובדרך אלגברית
- 1.** א. לא נכון. אפשר לראות בגרף שכל ערכי הפונקציה חיוביים או 0. הגדרת  $\sqrt{x}$  היא "המספר החיובי (או 0) שריבועו הוא  $x$ ".
- ב. לא נכון. ההיפך נכון  $\sqrt{81} = 9$ .
- ג. נכון. ד. נכון.
- ה. לא נכון. תחום ההצבה הוא כל המספרים החיוביים או 0.
- ו. נכון. ז. נכון.
- ח. נכון. אפשר לראות בגרף שככל שערכו של  $x$  גדול יותר ערכו של  $y$  גדול יותר.
- ט. נכון. ככל ש- $x$  גדל עליית הפונקציה מתמתנת.

**2.** משימה זו נועדה להביא להכרות ראשונית של פונקציית השיפור..

א. הציון המשופר של רמי הוא בערך 85 ( $10\sqrt{72} \approx$ )

ב.  $10\sqrt{x} = 90$

$$\sqrt{x} = 9$$

$$x = 81$$

הציון המקורי של חנה הוא 81.

ג. משמעות דבריו של איתי היא: הציון המשופר שווה לציון המקורי. תלמידים כנראה יפתרו את השאלה על-ידי ניסוי וטעיה. בשלב זה, אין צורך לדרוש מהם להשתמש בכלים אלגבריים. בהמשך (משימה 5ג) הם יתבקשו לעשות זאת בעזרת האלגברה.

$$10\sqrt{x} = x$$

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה בידיעה שפעולה זו עלולה להוסיף פתרונות שאינם פותרים את המשוואה המקורית.

$$100x = x^2$$

$$x(100-x)=0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 100$$

ואמנם הציונים 0 ו-100 אינם משתפרים בשיטה זו של שיפור הציון.

**3.** א. התחום המתאים לתוכן הבעיה הוא  $0 \leq x \leq 100$ .

ב. הגרף של  $f(x) = 10\sqrt{x}$  דומה לגרף של  $y = \sqrt{x}$ , אבל הוא יותר גבוה ממנו, כי כל ערך  $y = \sqrt{x}$  מוכפל ב-10.

**5.** א.  $s(x) = 10\sqrt{x} - x$

ב.  $s(100) = 0 \quad s(0) = 0$

ג. ראו פתרון משימה 2ג. ההערה לגבי העלאה בריבוע היא חשובה ביותר, וכדאי להדגיש אותה ולהראות דוגמאות שבהן הפעולה של העלאה בריבוע של שני אגפי משוואה אכן מוסיפה פתרונות. כלומר פעולת העלאה בריבוע אינה נותנת בהכרח משוואה שקולה למשוואה המקורית.

דוגמה:  $x + \sqrt{x} = 12$

$$\sqrt{x} = 12 - x$$

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה:

$$x = 144 - 24x + x^2$$

$$x^2 - 25x + 144 = 0$$

$$x_1 = 9 \quad x_2 = 16$$

אם נציב את הפתרונות במשוואה המקורית נגלה שרק 9 הוא פתרון שלה, ו-16 נוסף בעקבות פעולת ההעלאה בריבוע.

ד. צריך להוכיח כי לכל  $x$   $0 \leq x \leq 100$  מתקיים  $10\sqrt{x} \geq x$

מכיוון ששני האגפים מייצגים מספרים חיוביים, ההעלאה בריבוע שלהם לא תשנה את כיוון האי-שוויון.

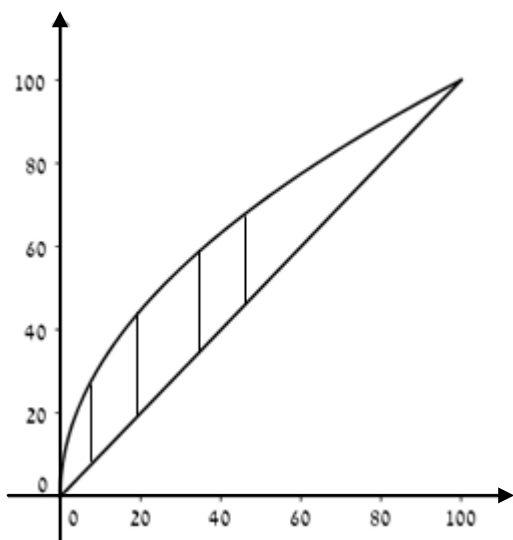
$$100x \geq x^2$$

$$x(100 - x) \geq 0$$

אם  $x$  הוא 0 או 100, המכפלה היא 0 והטענה נכונה.

אם  $x$  בין 0 ל-100, המכפלה חיובית והטענה נכונה.

ה. בשלב זה של העבודה רוב התלמידים יגידו שאין מספרים כאלה כי רובם חושבים על מספרים שלמים.



6. א. לשם כך אפשר לשרטט קטע מאונך לציר ה- $x$ , בין שתי

הפונקציות להזיז אותו ולעקוב אחרי אורכו.

**הדרכה לגאוגברה:**

- מסמנים נקודה A על הפונקציה  $y = 10\sqrt{x}$ .

- מורידים אנך מן הנקודה A לציר ה- $x$ .

- מסמנים את נקודת החיתוך B בין האנך לבין הישר  $y = x$ .

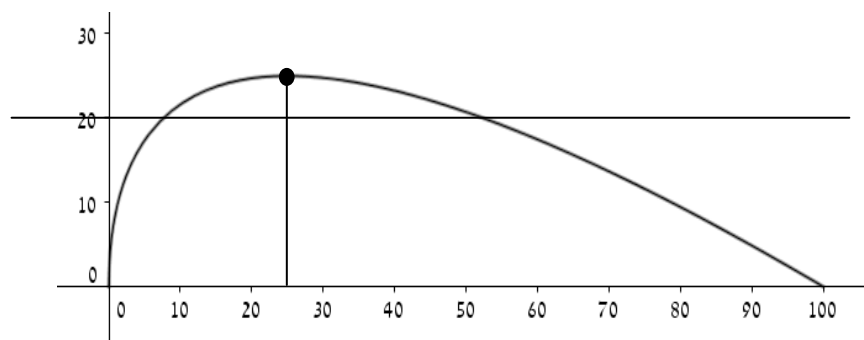
- מסמנים קטע AB. אורכו c מופיע על המסך.

- מזיזים את הקטע AB על-ידי הזזת הנקודה A ועוקבים

אחר השתנות אורך הקטע.

ב. די קשה למצוא זוגות כאלה בעזרת הגרף הזה, אבל יש להבין כי הם קיימים ולא רק זוג אחד אלא אינסוף זוגות מספרים. בשלב זה, אין לדחוף את התלמידים להסיק את המסקנה הזאת. הם יוכלו להשתכנע בכך במשימות הבאות.

7. בגרף השיפור בציון רואים במפורש כי לכל ציון יש בן-זוג שיש לו אותו שיפור בציון



א. השיפור הגדול ביותר מתקבל עבור הציון 25.

ב. לכל ציון מקורי בין 0 ל-100 (פרט ל-25) יש "בן-זוג" כלומר, ציון הזוכה לאותו שיפור.

דוגמה: שני הציונים 7.5 ו-52.5 משתפרים ב-20 נקודות בערך.

8. כדי שלשני ציונים שונים a ו-b יהיה אותו שיפור בציון צריך להתקיים:

$$10\sqrt{a} - a = 10\sqrt{b} - b$$

$$10\sqrt{a} - 10\sqrt{b} = a - b$$

$$10(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad \text{לפי הרמז במשימה}$$

מכיוון ש-  $a \neq b$  מותר לחרק את שני אגפי המשוואה בביטוי  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  שאינו 0.

$$10 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

כלומר, כדי שלשני ציונים שונים a ו-b יהיה אותו שיפור בציון צריך להתקיים שסכום השורשים שלהם הוא 10.

על-פי התנאי הזאת יתן למצוא לכל ציון את בן זוגו. נמצא למשל את בן זוגו של הציון 64.

$$8 + \sqrt{b} = 10$$

$$\sqrt{b} = 2$$

$$b = 4$$

ואמנם לציונים 64 ו-4 יש שיפור של 16 נקודות בציון.

9. בדרך-כלל המטרה של שיפור ציון היא לשפר יותר את הציונים של התלמידים שנכשלו במבחן הקשה. השיטה

הזאת לשיפור בציון אינה משנה את תחום הציונים והיא אכן מיטיבה עם הציונים הנמוכים. את השיפור הגדול

ביותר מקבל הציון 25. צורת הגרף של השיפור מראה כי בין הציונים 0 ל-25 השיפור עולה מהר ולאחר מכן

לציונים בין 25 ל-100 השיפור יורד לאט, עד שהוא מגיע לשיפור 0 עבור הציון 100.



### שומרים על כושר

- |  |  |                            |
|--|--|----------------------------|
| ז. הביטוי $\sqrt{-x^2}$ אינו מוגדר בממשיים | ד. לא נכון עבור $x < 0$<br>$-\sqrt{(-3)^2} \neq -(-3)$ | 1. א. לא נכון עבור $x < 0$ |
| ח. הביטוי $\sqrt{-x^2}$ אינו מוגדר בממשיים | ה. לא נכון. עבור $x > 0$<br>$\sqrt{(-4)^2} \neq -4$    | ב. נכון                    |
| ט. נכון                                    | ו. הביטוי $\sqrt{-x^2}$ אינו מוגדר בממשיים             | ג. נכון                    |

ה.  $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

ג.  $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

2. א.  $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

ו.  $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

ד.  $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

ב.  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



השנה שבה מדובר אינה יכולה להיות רחוקה בהרבה מן השנה הנוכחית כי הגיל של אבי ינו יכול לעלות על 120. וככל שהמספר גדול יותר, ריבועו גדל מהר יותר. השנה שבה נכתב מדריך זה היא 2015. נחשב לפי נתון זה.  
 $44 < \sqrt{2015} < 45$  ..

מכיוון שהחידה מנוסחת בלשון עתיד, השנה בה התופעה אמורה לקרות צריכה להיות  $45^2$  או יותר. עבור 45 – אבי יהיה בן 45 בשנת  $2025 = (45)^2$ . לכן השנה אבי בן 35. עבור 46 – אבי יהיה בן 46 בשנת  $2116 = (46)^2$ . לכן השנה אבי בן 101. זהו גיל גבוה מדי עבור אב של תלמיד בכיתה ט...



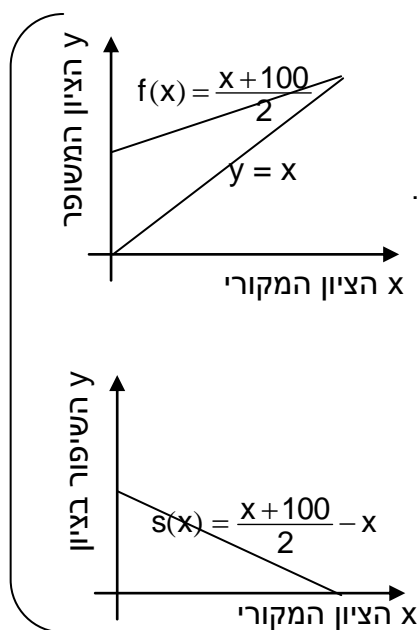
אחד המורים החליט לשפר את הציון לפי שיטה אחרת: הציון המשופר הוא הממוצע בין הציון המקורי ו-100. חקרו את השיטה הזאת והשוו אותה עם השיטה שבפעילות.

### תשובות

אפשר לחקור את השיטה בעזרת השאלות שנשאלו בפעילות.

אפשר גם לשרטט גרפים - של הציון המשופר, ושל השיפור ולגלות כי

- גם בשיטה זו הציונים המשופרים אינם חורגים מן התחום בין 0 ל-100.
- גם שיטה זו מיטיבה עם הציונים הנמוכים.
- גם שיטה זו אינה מורידה את הציון המקורי.
- ככל שהציון גבוה יותר השיפור יותר קטן (פונקציית השיפור יורדת).
- השיפור הגדול ביותר הוא שיפור של 50 נקודות עבור ציון מקורי 0.
- רק הציון המקורי 100 אינו משתפר.
- אין שני ציונים שמשתפרים באותו מספר נקודות.



- בודקים מהן התובנות של התלמידים מן הפעילות
- דנים על הייצוגים השונים שבהן הוצגה הסיטואציה, ועל היתרונות והחסרונות של כל ייצוג
- מתייחסים להגדרת השורש ריבועי ולפונקציית השורש ריבועי