

## יחידה 4: פונקציות ריבועיות

### 4.1 בעיית הגדר



מטרות

- עיסוק בסיטואציית בעיה מן המציאות שתרגומה היא פונקציה ריבועית.
- שימוש והעמקה בביטויים אלגבריים ובגרפים ובקשר ביניהם
- הצגת שני מודלים אלגבריים עבור אותה בעיה והכרה בשוויון התוצאות שנובעות מהם



אמצעי עזר

תוכנה גרפית (Geogebra),  
דף לשרטוטים ניסויים לפתרון היחידה (ניתן לשכפול).



פתיחה

קוראים את הפתיח עם התלמידים, ומדגישים את ענין הגשת הדווח הזוגי או הקבוצתי.  
מבקשים מהתלמידים להתחיל ולחקור את השאלות.



פתרונות  
והערות

הפעילות מבוססת על הבעיה של חקירת סדרת מלבנים בעלי היקף קבוע. בסיטואציה של הפעילות הזאת מעורבים רק שלוש צלעות של המלבן. מכיוון שצלע אחת של המלבן מעורבת פעמיים בעוד הצלע השנייה מעורבת רק פעם אחת, שני מימדי האורך אינם סימטריים. הכלים המתמטיים הנדרשים לעבודה על פעילות זאת הם פונקציות ריבועיות עם הדגשה על הייצוג הגרפי שלהן, ועל פתרון משוואות. פתרון המשוואות יכול להיעשות בדרך אלגברית או בדרך גרפית. הפתרון הגרפי הוא קירוב הנעשה על-ידי הסתכלות על הגרף, והתקרבות על-ידי הצבה מספרית וחישוב, או על-ידי הליכה על הגרף במחשב.

למשימה שלושה חלקים.

**חלק ראשון** – התייחדות עם הסיטואציה על-ידי מציאת דוגמאות מספריות למידות של חלקות מתאימות, ומציאת הקשר בין מידות המלבן לבין שטחו.

**חלק שני** – בחירת משתנה בדרכים שונות, ויצירת שני מודלים שונים (פונקציות ריבועיות) לאותה סיטואציה (שטח החלקה)

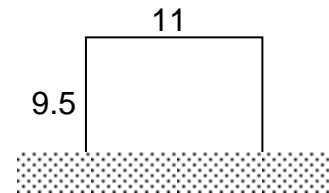
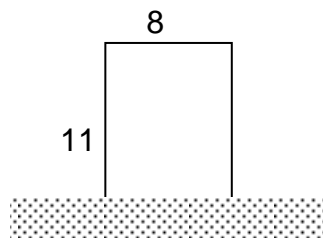
**חלק שלישי** – השוואת שני המודלים והבנת המשמעות שלהם בבעיה הנתונה.

**1.** קיימות אפשרויות רבות. כל זוג של מספרים **חיוביים**  $(x, y)$  המקיים את המשוואה  $x + 2y = 30$  מתאים כתשובה. ניתן למצוא זוגות כאלה על-ידי ניסוי וטעיה, או על-ידי הצבת מספר עבור צלע אחת ופתרון משוואה

עבור הצלע השניה. כדאי לרשום בטבלה את הדוגמאות למידות המלבנים ולשטחם. כדאי גם להתייחס לבעייה ולא רק למספרים. למשל, לתת את הדעת לצורת החלקה ביחס לקיר.

**2.**

קיימות שתי אפשרויות



אם אורך הצלע הניצבת לקיר הוא 11 מ'

אם אורך הצלע המקבילה לקיר הוא 11 מ'

אורך הצלע השניה יהיה 8 מ' ( $= 30 - 2 \cdot 11$ ).

אורך הצלע השניה יהיה 9.5 מ' ( $= \frac{30 - 11}{2}$ ).

השטח יהיה 88 מ"ר ( $= 11 \cdot 8$ )

השטח יהיה 104.5 מ"ר ( $= 11 \cdot 9.5$ )

**3.** בשלב זה ההשערה יכולה להתבסס על התוצאות שנאספו במשימות הקודמות או על אינטואיציה כתוצאה

מהתנסויות בבעיות דומות שבהן לריבוע (שמידותיו בשאלה זאת 10 מ' x 10 מ') יש השטח הגדול ביותר. המטרה בשאלה זו אינה להגיע לתשובה הנכונה אלא להעלות השערה. כל השערה מנומקת תתקבל. ההשערה תבדק בהמשך, ממשימה 5 ואילך.

**4.** החלקה תהיה ריבועית אם מידותיה 10 מ' x 10 מ'. במקרה כזה שטח החלקה יהיה 100 מ"ר.

התשובה נובעת באופן מיידי מן הסיטואציה כי הגדר היא בעלת אורך של 30 מ' ויש לה שלושה צדדים.

תלמידים המעדיפים פתרון אלגברי יפתרו את המשוואה  $x = 30 - 2x$  אם  $x$  מייצג את אורך הצלע הצדדית של

החלקה, או את המשוואה  $\frac{30 - x}{2} = x$ , אם  $x$  מייצג את אורך הצלע המקבילה לקיר.

הפתרון של שתי המשוואות הוא  $x = 10$ .

**5.**

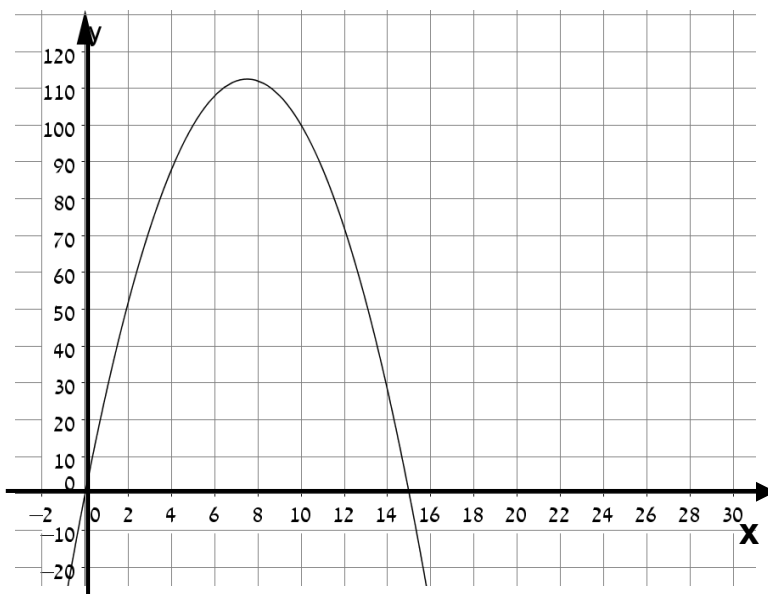
א.  $0 < x < 15$

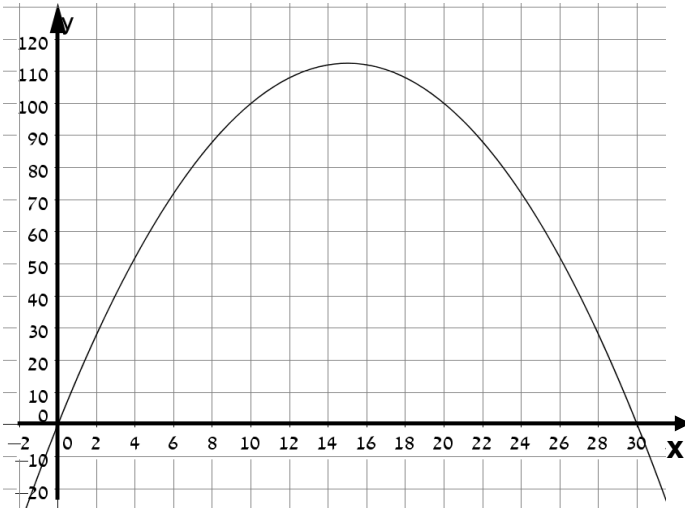
ג.

ב.  $f(x) = x(30 - 2x)$

ד. כ- 85 מ"ר. יש חלקה נוספת בעלת

אותו שטח.





ג.

6. א.  $0 < x < 30$

ב.  $g(x) = x \cdot \frac{30-x}{2}$

ד. אפשר להגיע אל התשובה בדרך אלגברית, גרפית או מספרית על-ידי ניסוי וטעיה.

הדרך הגרפית היא המהירה ביותר. התבוננות בשני הגרפים (במשימות 5 ו-6) תראה כי לשתי חלקות יש שטח של 72 מ"ר, ואין חלקה אשר לה שטח 150 מ"ר.

בדרך אלגברית אפשר לפתור אחת משתי משוואות  $x(30-2x) = 72$  או  $x \cdot \frac{30-x}{2} = 72$  ולמצוא את

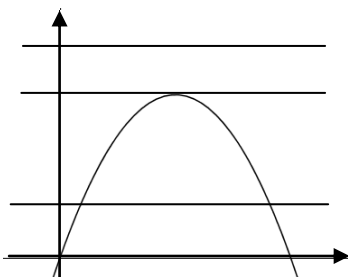
המידות של החלקות שהן בעלות שטח 72 מ"ר

למשוואה הראשונה נקבל שני פתרונות  $x_1 = 3$   $x_2 = 12$ . חשוב מאוד לפרש את הפתרונות בהקשר לסיטואציה. מדובר בשתי חלקות שונות ששטחן 72 מ"ר. המידות של חלקה אחת הן  $3 \times 24$  וצלעה הארוכה מקבילה לקיר, והמידות של החלקה השנייה הן  $6 \times 12$  וצלעה הקצרה מקבילה לקיר.

למשוואה השנייה נקבל שני פתרונות  $x_1 = 6$   $x_2 = 24$ . אלה הם מידות הצלע השנייה של כל חלקה. אם נחשב את מידות המלבנים האלה נראה שמדובר אותן שתי חלקות מן האפשרות הקודמת.

במקרה השני, אפשר לפתור אחת משתי משוואות  $x(30-2x) = 150$  או  $x \cdot \frac{30-2x}{2} = 150$ , לראות כי

לשתי המשוואות אין פתרון. ולהסיק כי אין חלקה ששטחה 150 מ"ר. כפי שנראה בהמשך השטח הגדול ביותר שיכול להתקבל בנתונים אלה הוא 112.5 מ"ר.



7.

יש מקביל לציר ה- $x$  יחתוך את הפרבולה בשתי נקודות עד נקודת המקסימום של הפונקציה. הישר ייגע בפרבולה בנקודה אחת בנקודת המקסימום. אם הישר יעבור מעל לנקודת המקסימום, לא תהיינה לו נקודות חיתוך עם הפרבולה. המקסימום מתקבל עבור הפונקציה  $f$  בנקודה שבה  $x = 7.5$ , ועבור הפונקציה  $g$  בנקודה שבה  $x = 15$ . שני המודלים מצביעים על החלקה שמידותיה  $7.5 \times 15$  ושטחה 112.5 מ', כחלקה ששטחה הוא המקסימלי.

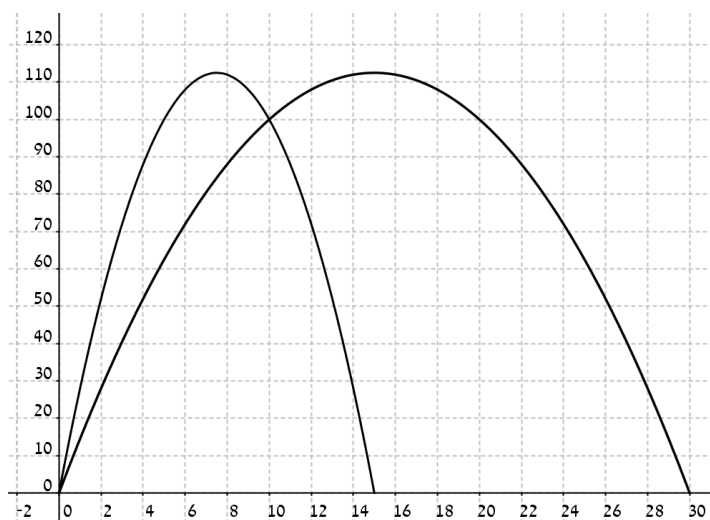
יש לקחת בחשבון כי תלמידים שמכירים בעיות דומות ששאלות על השטח המקסימלי של מלבנים בעלי היקף קבוע, עשויים להיות מופתעים ממקרה זה שבו התשובה אינה ריבוע.

א. ישר המקביל לציר  $x$  הוא מהצורה  $y = k$ . עבור שתי הפונקציות אם  $0 < k < 112.5$  הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות. למשל, כפי שראינו,  $y = 72$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות, המייצגות שתי חלקות שונות. שיעור  $x$  של כל נקודה מייצג את אורך אחת מצלעות החלקה, ושיעור  $y$  מייצג את שטחה.

ב. בשתי הפונקציות הישר  $y = 112.5$  נוגע בפונקציה בנקודה אחת: בפונקציה אחת הנקודה היא  $(7.5, 112.5)$ , ובפונקציה השנייה היא  $(7.5, 112.5)$  הנקודה מייצגת את החלקה ששטחה מקסימלי.  
 ג. בשתי הפונקציות, אם  $k > 112.5$  (למשל,  $y = 120$ ) הישר אינו חותך את גרף הפונקציה. המשמעות היא: שאין חלקה שהיא בעלת שטח של 120 מ"ר.

**8.** שני הגרפים אינם זהים כי אין להם אותו תחום, והביטויים האלגבריים המתאימים להם אינם זהים. בסיפור זה יש שלושה משתנים – שני אורכים של צלעות החלקה ושטח החלקה. כל אחת משתי הפונקציות מתארת קשר בין שני משתנים – אורך של אחת הצלעות ושטח החלקה המתאימה. בכל פונקציה  $x$  מייצג אורך של צלע שונה, ולכן ההתאמות המתקבלות שונות, למרות שהן מתייחסות לאותה הסיטואציה ולאותן החלקות.

**9.** בשרטוט שתי הפונקציות במערכת צירים אחת, ואפשר לראות את הדמיון והשוני בין הפונקציות.



#### הדמיון

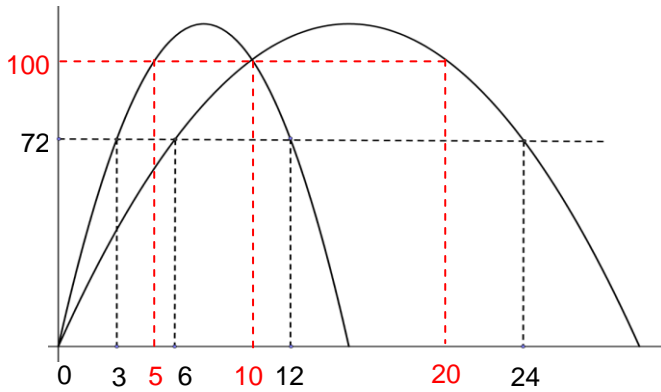
- נקודות הקודקוד של שתי הפרבולות הן באותו גובה, כי החלקה שמידותיה  $7.5 \times 15$  היא בעלת השטח הגדול ביותר – 112.5 מ"ר.
- שתי הפונקציות פרבולות. המשמעות היא כי לכל מידת שטח בין 0 ל- 112.5 (לא כולל) מתאימות שתי חלקות.

#### השוני

- התחומים של שתי הפונקציות שונים כי שיעור ה- $x$  אינו מייצג את האורך של אותה צלע.
- הפרבולה "המכווצת" יותר מתארת את הקשר בין אורך הצלע הניצבת לקיר לשטח החלקה, והפרבולה "הרחבה" יותר מתארת את הקשר בין אורך הצלע המקבילה לקיר לשטח החלקה.

**10.** א. מידות החלקה ששטחה מקסימלי הן  $7.5 \times 15$  ושטחה 112.5 מ"ר. יש רק חלקה אחת כזו.

ב. אם נעביר ישר מקביל לציר ה- $x$ , ונמצא 4 נקודות חיתוך בינו לבין הפונקציות, אז ארבע הנקודות מייצגות שתי חלקות בעלות אותו שטח. כל זוג נקודות שאחת מהן נמצאת על הענף העולה של פונקציה אחת והשנייה על הענף היורד של פונקציה אחרת, מייצגות את אותה החלקה. שיעורי ה- $x$  של שתי נקודות אלו מייצגות את אורכי שתי הצלעות של החלקה.



כך למשל, אם המקביל יחתוך את ציר  $y$  בנקודה שבה  $y = 72$ , הוא יחתוך את שתי הפונקציות בנקודות:  $(3, 72)$ ,  $(6, 72)$ ,  $(12, 72)$ ,  $(24, 72)$ . ארבע הנקודות האלה מייצגות שתי חלקות. האחת שמידותיה  $3 \times 24$ , והאחרת שמידותיה  $6 \times 12$ . (ראו שרטוט).

ג. לחלקה המיוצגת על-ידי הנקודה המשותפת יש שתי צלעות שוות, כי בכל פונקציה המשתנה  $x$  מייצג צלע אחרת, ובנקודה זו לשתי הפונקציות יש אותו שיעור  $x$  ( $x = 10$ ). (ראו שרטוט למעלה). במקרה זה החלקה היא ריבוע  $10 \times 10$  ששטחו  $100$  מ"ר. שתי נקודות החיתוך האחרות בין הגרפים של הפונקציות והישר  $y = 100$  מייצגות את החלקה שמידותיה  $5 \times 20$  ושטחה גם כן  $100$  מ"ר.



## שומרים על כושר

1. אפשר לפתור בדרך אלגברית, אבל ייתכן שדרכים אחרות מהירות יותר.

$$א. \quad x(x + 1) = 240$$

מכפלת שני מספרים עוקבים היא  $240$ . אפשר למצוא את המספרים  $15$  ו- $16$  או  $16$  ו- $15$  על-ידי ניסוי וטעיה. מסיקים מכך כי פתרון המשוואה הוא  $x = 15$  או  $x = -16$ .

$$ב. \quad 2x(x + 2) = 240$$

$$x(x + 2) = 120$$

מכפלת שני מספרים בדילוג  $2$  היא  $120$  המספרים הם  $10$  ו- $12$  או  $12$  ו- $10$ . מסיקים מכך כי פתרון המשוואה הוא  $x = 10$  או  $x = -12$ .

$$ג. \quad 5x(x + 2) = 240$$

$$x(x + 2) = 48$$

מכפלת שני מספרים בדילוג  $2$  היא  $48$  המספרים הם  $6$  ו- $8$  או  $8$  ו- $6$ . מסיקים מכך כי פתרון המשוואה הוא  $x = 6$  או  $x = -8$ .

$$ד. \quad 4x(x - 4) = 240$$

$$x(x - 4) = 60$$

מכפלת שני מספרים בדילוג  $4$  היא  $60$  המספרים הם  $10$  ו- $6$  או  $6$  ו- $10$ . מסיקים מכך כי פתרון המשוואה הוא  $x = 10$  או  $x = -6$ .

$$ה. \quad x(2x - 4) = 240$$

$$x(x - 2) = 120$$

מכפלת שני מספרים בדילוג  $2$  היא  $120$  המספרים הם  $12$  ו- $10$  או  $10$  ו- $12$ . מסיקים מכך כי פתרון המשוואה הוא  $x = 12$  או  $x = -10$ .

$$x(10x + 20) = 240 \quad .\text{ו.}$$

מכפלת שני מספרים בדילוג 2 היא 24 המספרים הם 4 ו-6 או 6 ו-4 או -4 ו-6. מסיקים מכך כי פתרון המשוואה הוא  $x = 4$  או  $x = -6$ .

$$(x - 1)(x - 2) = 240 \quad .\text{ז.}$$

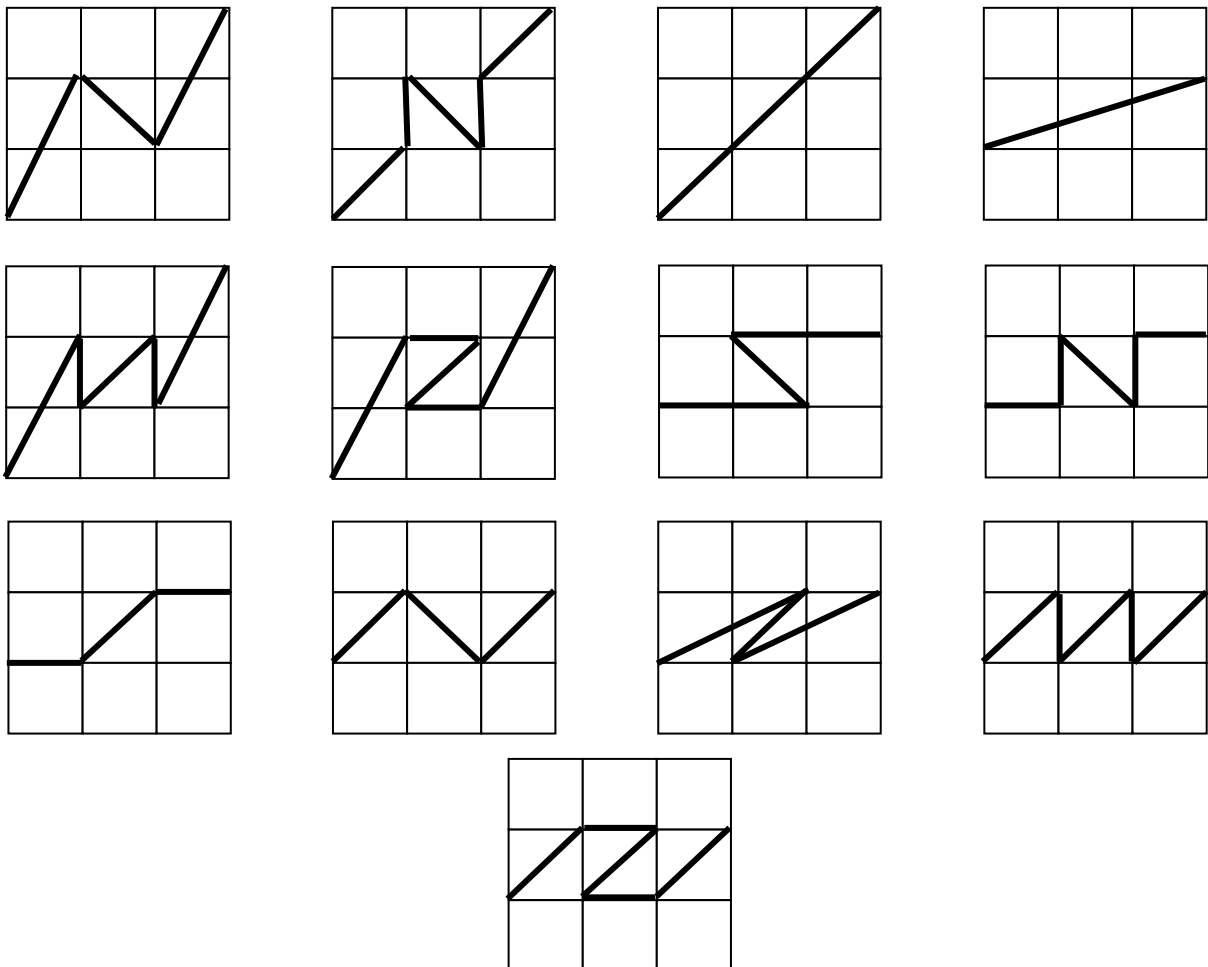
מכפלת שני מספרים עוקבים היא 240. המספרים הם 15 ו-16 או 16 ו-15. מסיקים מכך כי פתרון המשוואה הוא  $x = 17$  או  $x = -14$ .

$$2(x + 5)(x + 7) = 240 \quad .\text{ח.}$$

מכפלת שני מספרים בדילוג 2 היא 120 המספרים הם 10 ו-12 או 12 ו-10. מסיקים מכך כי פתרון המשוואה הוא  $x = 5$  או  $x = -17$ .



יש 13 אפשרויות. מצורף דף לשרטוטים ניסויים הניתן לשכפול.

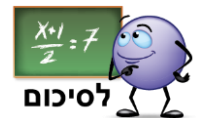




1. בית ספר ארזים קיבל בתרומה גדר של 30 מ'. ליד בנין בית הספר נמצאת חלקת אדמה. המנהלת החליטה לגדר בעזרת כל הגדר חלקה מלבנית עבור גינת פרחים. החלקה מגודרת מארבעה צדדים.
- א. מצאו שלוש אפשרויות למידות החלקה ומצאו לכל אפשרות את שטחה.
- ב. מה שטח החלקה, אם אחת ממידותיה 11 מ'?
- האם יש חלקה נוספת בעלת אותו שטח?
- ג. מהן מידות החלקה בעלת השטח הגדול ביותר?
- ד. האם אפשר להקיף באמצעות גדר זאת חלקה שצורתה ריבוע. אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, מה המידות ומה שטח החלקה במקרה זה?

### תשובות

1. א. אפשרויות תשובות רבות. בכולן סכום המידות הוא 15. למשל, מידות החלקה הן  $3 \times 12$  ושטחה 36 מ"ר. מידות החלקה הן  $7 \times 8$  ושטחה 56 מ"ר.
- ב. מידות החלקה הן  $4 \times 11$  שטחה 44 מ"ר. אין חלקה נוספת ששטחה 44 מ"ר. אם נפתור את המשוואה הריבועית הרלוונטית  $x(15 - x) = 44$ , נקבל את הפתרונות  $x = 4$  ו-  $x = 11$ . כלומר, מידות המלבנים  $4 \times 11$  או  $11 \times 4$ . אלה שני מלבנים זהים.
- ג. מידות החלקה בעלת השטח הגדול ביותר הן:  $7.5 \times 7.5$  ושטחה 56.25 מ"ר. אחת המידות היא שיעור  $x$  של הקודקוד. ניתן למצוא שיעור זה, וכתוצאה מכך את השיעור השני ואת השטח, בדרך גרפית או בדרך אלגברית.
- ד. החלקה הריבועית היא זאת ששטחה הגדול ביותר. מידותיה  $7.5 \times 7.5$  ושטחה 56.25 מ"ר.



- בודקים מהן התובנות של התלמידים מן הפעילות
- דנים על הייצוגים השונים שבהן הוצגה הסיטואציה, ועל היתרונות והחסרונות של כל ייצוג
- לסיטואציה יכולים להיות מודלים שונים עם פתרונות מתמטיים שונים, אך התשובות לשאלות הנשאלות לגבי הסיטואציה חייבות להיות אותן התשובות.
- אם תלמידים רבים פתרו את המשימה שבמדור "למסיימים" ניתן לערוך השוואה בין שתי הסיטואציות.

## דף לצילום עבור החידה

