# 3.4 יוצרים שלשות פיתגוריות

**מטרות**

- שימוש והעמקה בנושא משפט פיתגורס
- שימוש והעמקה בנושא נוסחאות הכפל המקוצר
- קישור בין אלגברה לגיאומטריה
- הצדקת טענות בדרך אלגברית
- שימוש בטענות כלליות עבור מקרים פרטיים

**אמצעי עזר**

גיליון אלקטרוני (*Excel*),

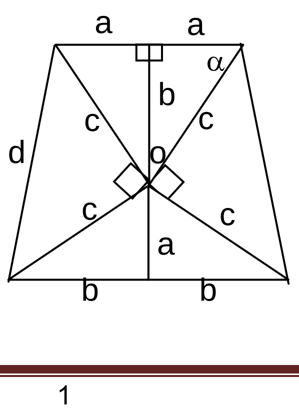
**פתיחה**

מציגים לתלמידים את המשולשים שבפתיח, מבקשים מהם ליצור מהמשולשים טרפז שווה-שוקיים, ולהוכיח כי אכן נוצר טרפז כזה.

**פתרונות והערות**

הפעילות עוסקת ביצירת שלשות פיתגוריות בדרכים שונות. נוסחה כללית לכל השלשות הפיתגוריות היא:
$[(s^2 + t^2)k\ ,\ (s^2 - t^2)k\ ,\ 2stk]$ עבור $s > t$. הפעילות אינה מביאה את הנוסחה הכללית הזאת, אלא מפרקת אותה למקרים פרטיים.

תחילה נזכרים במשפט פיתגורס על-ידי הוכחה לא שגרתית שלו.




את הטרפז שבפתיח ניתן להרכיב כך:
ההוכחה שזה אכן טרפז מתבססת על חישובי זוויות.
נסמן את אחת הזוויות החדות במשולש ישר-הזווית ב- $\alpha$ .
הניצבים a ו- b, המאונכים ל"בסיסים", נמצאים על ישר אחד כי סכום הזוויות שקודקודן O מצד אחד של הניצבים הוא $180^0$ $(= x + 90 + (90 - x))$
לכן הבסיסים מקבילים והצורה היא טרפז.

**1.** הוכחת משפט פיתגורס מתבססת על שטחים:

| **שטח הטרפז כסכום שטחי המשולשים** | | **שטח הטרפז לפי נוסחה** |
|---|---|---|
| $\frac{4ab}{2}+\frac{2c^2}{2}=$ | = | $\frac{(2a+2b)(a+b)}{2}=$ |
| $2ab+c^2$ | = | $(a+b)^2$ |
| $2ab+c^2$ | = | $a^2+2ab+b^2$ |

לכן: $a^2+b^2=c^2$

**2.** א. נתון: $a^2+b^2=c^2$

צ"ל: $(na)^2+(nb)^2=(nc)^2$

הוכחה: $(na)^2+(nb)^2=$

$n^2a^2+n^2b^2=$

$n^2(a^2+b^2)=$

$n^2c^2=(nc)^2$

ב. למשל, על-סמך השלשה הפיתגורית 5 ,4 ,3 ניתן ליצור שלשות פיתגוריות שונות.

דוגמאות: (15, 20, 25) , (6, 8, 10) , (30, 40. 50)

ג. על-סמך השלשה 5 ,4 ,3 ומכיוון ש $5\cdot 40=200$.

השלשה הפיתגורית היא $(5\cdot 40\ ,\ 4\cdot 40\ ,\ 3\cdot 40)$ כלומר (120, 160, 200)

**3.** א. למשל, אם נבחר את המספרים 7 ו- 9.

סכומם 16, מכפלתם 63 ומכפלתם בתוספת 2 היא 65.

זוהי שלשה פיתגורית כי $16^2+63^2=65^2$ (256 + 3,969 = 4,225)

ב. הוכחה כללית

נייצג את המספרים שבחרנו על-ידי n ו- n + 2.

השלשה היא n(n + 2) + 2 , n(n + 2) , n + (n + 2)

צ.ל.: $(2n+2)^2+(n^2+2n)^2=[n(n+2)+2]^2$

הוכחה: $[n(n+2)+2]^2=$

$[n(n+2)+2]^2=$

$n^2(n+2)^2+4n(n+2)+4=$

$n^4+4n^3+4n^2+4n^2+8n+4=$

$n^4+4n^3+8n^2+4$

$(2n+2)^2+(n^2+2n)^2=$

$(2n+2)^2+(n^2+2n)^2=$

$4n^2+8n+4+n^4+4n^3+4n^2=$

$n^4+4n^3+8n^2+4$

לכן, $[n(n+2)+2]^2 = (2n+2)^2+(n^2+2n)^2$

הוכחה:

$$[n(n+2)+2]^2 =$$

$$[n(n+2)+2]^2 =$$

$$n^2(n+2)^2+4n(n+2)+4=$$

$$n^4+4n^3+4n^2+4n^2+8n+4=$$

$$n^4+4n^3+8n^2+4$$

$$(2n+2)^2+(n^2+2n)^2 =$$

$$(2n+2)^2+(n^2+2n)^2 =$$

$$4n^2+8n+4+n^4+4n^3+4n^2 =$$

$$n^4+4n^3+8n^2+4$$

לכן, $[n(n+2)+2]^2 \quad = \quad (2n+2)^2+(n^2+2n)^2$

ג. דוגמאות לשלשות פיתגוריות הנוצרות בדרך זו.

3 ו- 5 יוצרים את השלשה הפיתגורית היסודית 8, 15, 17

2 ו- 4 יוצרים את השלשה הפיתגורית 6, 8, 10 שאינה יסודית

5 ו- 7 יוצרים את השלשה הפיתגורית היסודית 12, 35, 37

10 ו- 12 יוצרים את השלשה הפיתגורית 22, 120, 122 שאינה יסודית.

לפי הדוגמאות האלה אפשר לשער כי אם שני המספרים היוצרים את השלשה הם זוגיים, לא מתקבלת שלשה יסודית. ואמנם אם שני המספרים היוצרים את השלשה הם זוגיים, אז גם סכומם זוגי, גם מכפלתם זוגית וגם מכפלתם בתוספת 2 היא זוגית.

לכן לשלשה הפיתגורית שנוצרה בדרך זו יש גורם משותף (לפחות 2) והיא אינה יסודית.

אם שני המספרים היוצרים את השלשה הם אי-זוגיים, אפשר לשער כי מתקבלת שלשה פיתגורית יסודית.

**הוכחה בדרך א:**

נסמן את המספרים האי-זוגיים ב- $2n - 1$ וב- $2n + 1$

השלשה היא $4n,\ 4n^2 - 1,\ 4n^2 + 1$ . אפשר לראות כי לשני האיברים האחרונים אין גורמים משותפים עם הגורם הראשון.

**הוכחה בדרך ב:**

שני מספרים אי-זוגיים שהפרשם 2 (בשלשה שלנו $4n^2 + 1$ ו- $4n^2 - 1$) הם תמיד זרים. לכן השלשה יסודית.

ד. צריך להתקיים $n + (n + 2) = 20$

$2n + 2 = 20$

$n = 9$

זוג המספרים היוצרים את השלשה: 9 ו- 11, והשלשה היא: 20, 99, 101.

**4.** א. נבחר למשל 3 ו- 5

השלשה 30, 16, 34 היא שלשה פיתגורית. ואמנם $30^2 + 16^2 = 34^2$

ב. נתונה השלשה $2xy,\ x^2 - y^2,\ x^2 + y^2$

$$(2xy)^2+(x^2-y^2)^2 =$$

$$4x^2y^2+x^4-2x^2y^2+y^4 =$$

$$x^4+2x^2y^2+y^4 =$$

$$(x^2+y^2)^2$$

לכן השלשה $2xy,\ x^2 - y^2,\ x^2 + y^2$ היא שלשה פיתגורית.

ג. דוגמאות לשלשות פיתגוריות הנוצרות בדרך זו:

1 ו- 2 יוצרים את השלשה הפיתגורית היסודית 5, 3, 4 .

1 ו- 3 יוצרים את השלשה הפיתגורית 10, 8, 6 שאינה שלשה יסודית.

1 ו- 4 יוצרים את השלשה הפיתגורית היסודית 17, 15, 8 .

2 ו- 4 יוצרים את השלשה הפיתגורית 20, 12, 16 שאינה שלשה יסודית.

3 ו- 6 יוצרים את השלשה הפיתגורית 45, 36, 27 שאינה שלשה יסודית.

לפי הדוגמאות האלה, אפשר לשער כי אם שני המספרים היוצרים את השלשה הם זוגיים או שניהם אי-זוגיים, מתקבלת שלשה שאינה יסודית. ואמנם במקרה כזה שלושת המספרים מתחלקים לפחות ב- 2.

אם אחד המספרים שיצר את השלשה הוא זוגי והשני אי-זוגי, מתקבלת לפעמים שלשה יסודית ולפעמים שלשה שאינה יסודית. כלומר, התנאי ששני המספרים היוצרים את השלשה יהיו בעלי זוגיות שונה הכרחי ליצור שלשה פיתגורית יסודית, אבל הוא אינו תנאי מספיק.

ד. נתון כי

$$x^2-y^2=21$$
$$x^2+y^2=29$$
$$2x^2=50$$
$$x^2=25$$
$$x=5 \quad , \quad y=2$$

**5.** א. נבדוק מקרים אחרים שבהם אחד המספרים הוא כפולה של 4. על-סמך משפט פיתגורס:

$$(4n)^2+(4n^2-1)^2=$$
$$16n^2+16n^4-8n^2+1=$$
$$16n^4+8n^2+1=$$
$$(4n^2+1)^2$$

והביטוי המייצג את אורך היתר הוא: $4n^2+1$

ב. דוגמאות לשלשות פיתגוריות הנוצרות בדרך זו:

אם n = 1 השלשה היא 5, 3, 4

אם n = 2 השלשה היא 17, 15, 8

אם n = 10 השלשה היא 401, 399, 40

**6.** א. $(n+1)^2-n^2=2n+1$

הביטוי המתאים לאורך הניצב השני הוא $\sqrt{2n+1}$

ב. כדי ליצור שלשה פיתגורית לפי שיטה זו יש לבחור תחילה את אורך היתר. אחרת עלולים לקבל מספר שאינו שלם עבור היתר. דוגמאות לשלשות פיתגוריות הנוצרות בדרך זו:

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{2n+1}=5$ | $\sqrt{2n+1}=11$ | $\sqrt{2n+1}=3$ |
| $2n+1=25$ | $2n+1=121$ | $2n+1=9$ |
| $n=12$ | $n=60$ | $n=4$ |
| השלשה: 13, 12, 5 | השלשה: 61, 60, 11 | השלשה: 5, 4, 3 |


**7.** א-ג. נבחר כדוגמה שתי שיטות ליצירת שלשות פיתגוריות:

- באמצעות מספר טבעי ומספר הגדול ממנו ב-2
- באמצעות כפולה של 4

**יצירת שלשות פיתגוריות באמצעות מספר טבעי ומספר הגדול ממנו ב-2**

נרשום בגיליון *Excel* כותרות כמתואר. נמלא את העמודה A במספרים טבעיים מ- 1 ועד 20. נרשום בשורה הראשונה את הנוסחאות הבאות.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | n | n+2 | a | b | c | a^2 + b^2 | c^2 |
| 2 | 1 | =A2+2 | =A2+B2 | =A2*B2 | =D2+2 | =C2^2+D2^2 | =E2^2 |

אחרי גרירה נקבל

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | n | n+2 | a | b | c | a^2 + b^2 | c^2 |
| 2 | 1 | 3 | 4 | 3 | 5 | 25 | 25 |
| 3 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 100 | 100 |
| 4 | 3 | 5 | 8 | 15 | 17 | 289 | 289 |
| 5 | 4 | 6 | 10 | 24 | 26 | 676 | 676 |
| 6 | 5 | 7 | 12 | 35 | 37 | 1369 | 1369 |
| 7 | 6 | 8 | 14 | 48 | 50 | 2500 | 2500 |
| 8 | 7 | 9 | 16 | 63 | 65 | 4225 | 4225 |
| 9 | 8 | 10 | 18 | 80 | 82 | 6724 | 6724 |
| 10 | 9 | 11 | 20 | 99 | 101 | 10201 | 10201 |
| 11 | 10 | 12 | 22 | 120 | 122 | 14884 | 14884 |
| 12 | 11 | 13 | 24 | 143 | 145 | 21025 | 21025 |
| 13 | 12 | 14 | 26 | 168 | 170 | 28900 | 28900 |
| 14 | 13 | 15 | 28 | 195 | 197 | 38809 | 38809 |
| 15 | 14 | 16 | 30 | 224 | 226 | 51076 | 51076 |
| 16 | 15 | 17 | 32 | 255 | 257 | 66049 | 66049 |
| 17 | 16 | 18 | 34 | 288 | 290 | 84100 | 84100 |
| 18 | 17 | 19 | 36 | 323 | 325 | 105625 | 105625 |
| 19 | 18 | 20 | 38 | 360 | 362 | 131044 | 131044 |
| 20 | 19 | 21 | 40 | 399 | 401 | 160801 | 160801 |
| 21 | 20 | 22 | 42 | 440 | 442 | 195364 | 195364 |

**מאפיינים**

- a תמיד זוגי.
- אם a הוא כפולה של 4, השניים האחרים אי-זוגיים ומתקבלת שלשה יסודית.
- אם a נותן שארית 2 בחלוקה ל- 4, אז כל המספרים בשלשה הם זוגיים, ולכן השלשה אינה יסודית.

**יצירת שלשות פיתגוריות באמצעות כפולה של 4**

נרשום בגיליון *Excel* כותרות כמתואר. נמלא את העמודה A במספרים טבעיים מ- 1 ועד 20. נרשום בשורה הראשונה את הנוסחאות הבאות.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **n** | **a** | **b** | **c** | **a^2 + b^2** | **c^2** |
| 2 | 1 | =A2*3 | =A2*4 | =A2*5 | =B2^2+C2^2 | =D2^2 |

אחרי גרירה נקבל

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **n** | **a** | **b** | **c** | **a^2 + b^2** | **c^2** |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 5 | 25 | 25 |
| 3 | 2 | 8 | 15 | 17 | 289 | 289 |
| 4 | 3 | 12 | 35 | 37 | 1369 | 1369 |
| 5 | 4 | 16 | 63 | 65 | 4225 | 4225 |
| 6 | 5 | 20 | 99 | 101 | 10201 | 10201 |
| 7 | 6 | 24 | 143 | 145 | 21025 | 21025 |
| 8 | 7 | 28 | 195 | 197 | 38809 | 38809 |
| 9 | 8 | 32 | 255 | 257 | 66049 | 66049 |
| 10 | 9 | 36 | 323 | 325 | 105625 | 105625 |
| 11 | 10 | 40 | 399 | 401 | 160801 | 160801 |
| 12 | 11 | 44 | 483 | 485 | 235225 | 235225 |
| 13 | 12 | 48 | 575 | 577 | 332929 | 332929 |
| 14 | 13 | 52 | 675 | 677 | 458329 | 458329 |
| 15 | 14 | 56 | 783 | 785 | 616225 | 616225 |
| 16 | 15 | 60 | 899 | 901 | 811801 | 811801 |
| 17 | 16 | 64 | 1023 | 1025 | 1050625 | 1050625 |
| 18 | 17 | 68 | 1155 | 1157 | 1338649 | 1338649 |
| 19 | 18 | 72 | 1295 | 1297 | 1682209 | 1682209 |
| 20 | 19 | 76 | 1443 | 1445 | 2088025 | 2088025 |
| 21 | 20 | 80 | 1599 | 1601 | 2563201 | 2563201 |

**מאפיינים**

- כל השלשות יסודיות
- בגיליון הזה נמצאות חלק מהשלשות של הגיליון הקודם.


1. א. $(3n-6)^2+(4n-8)^2=$

$9n^2-36n+36+16n^2-64n+64=$

$25n^2-100n+100=$

$(5n-10)^2$

הביטוי המייצג את היתר הוא $5n-10$

ב. $(x^2+y^2)^2-(2xy)^2=$

$x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y^2=$

$x^4-2x^2y^2+y^4=$

$(x^2-y^2)^2$

הביטוי המייצג את הניצב השני הוא $x^2-y^2$.

ג. $(4n^2+4n+2)^2-(4n^2+4n)^2=$

$[(4n^2+4n)+2]^2-(4n^2+4n)^2=$

$(4n^2+4n)^2+4(4n^2+4n)+4-(4n^2+4n)^2=$

$16n^2+16n+4=$

$(4n+2)^2$

הביטוי המייצג את הניצב השני הוא 4n + 2

2. א. $3n-6=6$

$n=4$

$4\cdot n-8=8$

$5\cdot n-10=10$

ב. $x^2+y^2=10$

$x=3 \quad y=1$

$2xy=6$

$x^2-y^2=8$

ג. $4n+2=6$

$n=1$

$4n^2+4n=8$

$4n^2+4n+2=10$

חידה

זוהי שלשה פיתגורית הנובעת מן השלשה 5 ,4 ,3 שכל אחד מהם מוכפל ב- 1,111

**למסיימים**

1. הציגו בגיליון אלקטרוני את השלשות הפיתגוריות הנוצרות בדרכים נוספות לשתי הדרכים שבחרתם למשימה 7.

**תשובות אפשריות**

**יצירת שלשות פיתגוריות באמצעות כפולות.**

נרשום בגיליון *Excel* כותרות כמתואר. נמלא את העמודה A במספרים טבעיים מ- 1 והלאה. נבחר שלשה פיתגורית, למשל, 5 ,4 ,3 ונרשום בשורה 2 נוסחאות בהתאם.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **n** | **a** | **b** | **c** | **a^2 + b^2** | **c^2** |
| 2 | 1 | =A2*3 | =A2*4 | =A2*5 | =B2^2+C2^2 | =D2^2 |

אחרי גרירה נקבל

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **n** | **a** | **b** | **c** | **a^2 + b^2** | **c^2** |
| 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 25 | 25 |
| 3 | 2 | 6 | 8 | 10 | 100 | 100 |
| 4 | 3 | 9 | 12 | 15 | 225 | 225 |
| 5 | 4 | 12 | 16 | 20 | 400 | 400 |
| 6 | 5 | 15 | 20 | 25 | 625 | 625 |
| 7 | 6 | 18 | 24 | 30 | 900 | 900 |
| 8 | 7 | 21 | 28 | 35 | 1225 | 1225 |
| 9 | 8 | 24 | 32 | 40 | 1600 | 1600 |

**יצירת שלשות בהן שני מספרים עוקבים**

השלשה מורכבת מהמספרים $a=\sqrt{2n+1}$ , $b = n$ , $c = n + 1$

יש לדאוג שהשורש יהיה מספר שלם. מתחת לשורש יש מספר אי-זוגי שצריך להיות ריבועי. לכן גם בסיס החזקה הריבועית צריך להיות אי-זוגי.

בשורה ראשונה נרשום כותרות ובשורה שנייה נוסחאות כמתואר

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **a** | **a^2** | **a** | **b** | **c** | **a^2 + b^2** | **c^2** |
| 2 | 3 | =A2^2 | =A2 | =(B2-1)/2 | =D2+1 | =C2^2+D2^2 | =E2^2 |

אחרי גרירה נקבל

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | a | a^2 | a | b | c | a^2+b^2 | c^2 |
| 2 | 3 | 9 | 3 | 4 | 5 | 25 | 25 |
| 3 | 5 | 25 | 5 | 12 | 13 | 169 | 169 |
| 4 | 7 | 49 | 7 | 24 | 25 | 625 | 625 |
| 5 | 9 | 81 | 9 | 40 | 41 | 1681 | 1681 |
| 6 | 11 | 121 | 11 | 60 | 61 | 3721 | 3721 |
| 7 | 13 | 169 | 13 | 84 | 85 | 7225 | 7225 |
| 8 | 15 | 225 | 15 | 112 | 113 | 12769 | 12769 |

**לסיכום**

- מתייחסים לדרכים השונות ליצירת שלשות פיתגוריות, ומנסים לברר
  - מי מהדרכים הכללית ביותר?
  - האם יש שלשות הנוצרות ביותר מדרך אחת
  - מהם המאפיינים של השלשות הנוצרות בכל דרך
  - תובנות נוספות שעלו תוך כדי העבודה.
- מתייחסים להוכחות האלגבריות ולכוחן הרב.
- סוקרים את הדרכים למציאת שלשות פיתגוריות יסודיות.