© כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

3.3 חושבים לפני שפותרים

מטרות

- שימוש והעמקה בנושא נוסחאות הכפל המקוצר
- צמצום ביטויים אלגבריים
- פתרון משוואות בדרך יעילה ומשמעותית
- התייחסות לפונקציות שבגרף שלהן יש "חור" (כלומר נקודות אי-רציפות)
- התייחסות לתחום ההצבה של משוואה ושל פונקציה

אמצעי עזר

תוכנה גרפית (למשל, *גאוגברה*),

פתיחה

מציגים לתלמידים את המשוואה שבפתיח ואת הפתרון המוצג, ועונים על השאלות. מציגים את מטרת הפעילות הזאת כפי שכתוב בשורה האחרונה שבפתיח.

פתרונות והערות

החלק הראשון של הפעילות עוסק במשוואות שאפשר לפתור שלא בדרך הסטנדרטית – אלא על-ידי שיקולים. בחלק מן המשוואות (לדוגמה, משימה 1ד או 1ח), ניתן לראות שכל הצבה בהן יוצרת מספרים שונים בשני האגפים, כלומר אין להן פתרון. בחלק אחר של המשוואות (לדוגמה, משימה 1ב), ניתן לראות כי תמיד האגפים שווים, כלומר הפתרון הוא כל המספרים השייכים לתחום ההצבה של המשוואה. כפי שאפשר לראות במשימה שבפתיח, ההתייחסות לתחום ההצבה חשובה מאוד. שני הפתרונות שהתקבלו על-ידי הפעלת פעולות על שני האגפים, אינם בתחום ההצבה של המשוואה, ולכן למשוואה אין פתרון. ההתייחסות לתחום ההצבה של המשוואה היא אחת הנקודות המודגשות בחלק זה של הפעילות. במשוואות שבהן השוואה בין שבר ל- 0, מספיק להשוות את המונה ל- 0 בתנאי שמתייחסים לתחום ההצבה.

החלק השני של הפעילות עוסק בפונקציות שהגרפים שלהן "מחוררים" (כלומר יש בהן נקודות אי-רציפות).

פונקציה כזאת היא פונקצית מנה f שאינה מוגדרת בנקודה מסוימת (למשל x_1). על-ידי צמצום המנה מתקבלת פונקציה g שהיא **כן** מוגדרת בנקודה x_1. כתוצאה מכך, צריך לומר כי $f(x) = g(x)$ בתנאי ש- $x \neq x_1$.

לכן הגרף של f שווה לגרף של g פרט לנקודה אחת. בגרף של f מסמנים "חור" המציין כי בנקודה זו הפונקציה f אינה מוגדרת. יש לציין כי תוכנות גרפיות רבות (למשל, *גאוגברה*) אינן מראות "חורים" בגרף, אבל בהילוך על גרף אם הסמן מגיע לנקודה כזו, המחשב מתריע על קיומה.

1. להלן שיקולים אפשריים למציאת הפתרונות. בחלק מהמקרים כדאי לבקש מן התלמידים לפתור את המשוואה בדרך הסטנדרטית, ולראות באיזה אופן מתקבל הפתרון שהם מצאו.

לדוגמה, בסעיף ד רואים כי המשתנים מתבטלים ואין שוויון בין האגפים. בסעיף ט מקבלים שני פתרונות המתבטלים לאחר שלוקחים בחשבון את תחום ההצבה.

א. $\frac{x^2-4}{4-x^2}=4$ הביטוי $4-x^2$ נגדי לביטוי x^2-4 לכל מספר שנציב במקום x. לכן המנה שלהם היא -1, או אינה מוגדרת אבל לא 4. לכן אין פתרון למשוואה.

ב. $\frac{x^2-4}{4-x^2}=-1$ השיקולים מסעיף א מובילים למסקנה שכל המספרים השייכים לתחום ההצבה של המשוואה הם פתרונות של המשוואה. לכן הפתרון הוא כל מספר פרט ל- $x \neq 2,-2$

ג. $\frac{x^2-4}{4-x^2}=0$ לפי אותם שיקולים כמו בסעיף א, אין פתרון למשוואה.

ד. $\frac{x^2-4}{x^2+4}=1$ ההצבה של מספר כלשהו במונה תיתן מספר קטן ב- 8 מן המספר שיתקבל בהצבה במכנה. לכן המנה תמיד קטנה מ- 1, ולמשוואה אין פתרון.

ה. $\frac{x^2-4}{x^2+4}=-1$ תוצאת הצבה תיתן -1 אם המונה והמכנה יהיו מספרים נגדיים. זה יקרה רק אם $x = 0$.
הפתרון הוא $x = 0$.

ו. $\frac{x^2-4}{x^2+4}=2$ המכנה תמיד חיובי והוא גדול מן המונה. לכן המנה תמיד קטנה מ- 1. ולמשוואה אין פתרון.

ז. $\frac{x^2-4}{x^2+4}=0$ תחום ההצבה הוא כל המספרים. השבר שווה ל- 0 אם המונה שווה ל- 0.
לכן הפתרון הוא $x = 2, -2$.

ח. $\frac{x^2+4}{x^2-4}=0$ המונה תמיד חיובי, ואף פעם אינו 0, לכן למשוואה אין פתרון.

ט. $\frac{x^2-4}{x^2-4}=0$ המונה והמכנה שווים. לכן לכל מספר מתחום ההצבה המנה שווה 1 (כלומר שונה מ- 0).
למשוואה אין פתרון.

2. א. אם נרשום באגף ימין -1 נקבל את המשוואה $\frac{1-x^2}{x^2-1}=-1$. למשוואה זו אינסוף פתרונות $(x \neq \pm 1)$.

ב. אין מספר כזה. עבור כל מספר פרט ל- -1 באגף ימין, למשוואה אין פתרון.

ג. משיקולים דומים לשיקולים בסעיף הקודם, אין מספר כזה.

ד. אם נרשום באגף ימין כל מספר פרט ל- -1 למשוואה לא יהיה פתרון.

.3 השיקולים בפתרון המשימה הם אלגבריים. ראו גם שרטוט גרף הפונקציה g במשימה הבאה במדריך זה.

א. כדי שיהיו אינסוף פתרונות, צריך למצוא מספר באגף ימין שיגרום לזהות. אין מספר כזה.

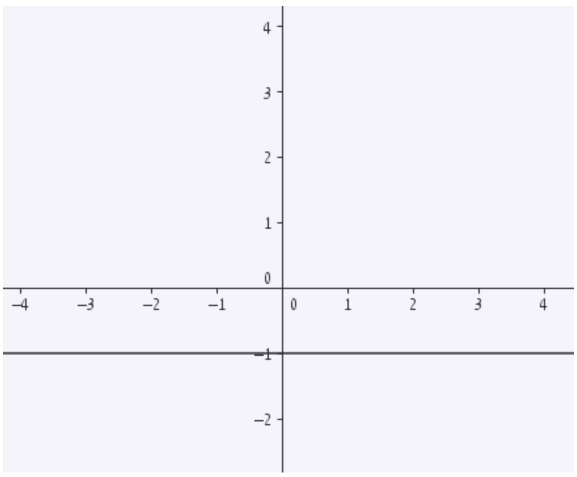
ב. למשל, $\frac{1-x^2}{1+x^2}=0.5$. לכל x, $1-x^2 \le 1+x^2$. לכן, המנה היא תמיד שבר (חיובי או שלילי) או 1.

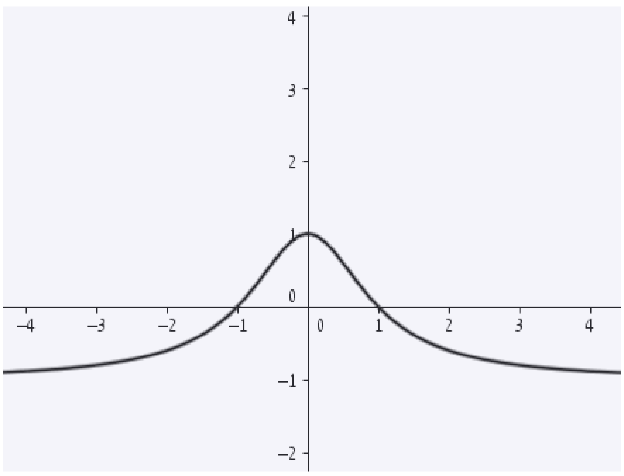
לכן, כדי שיהיו שני פתרונות, אפשר לרשום באגף ימין כל מספר בין -1 ל- 1.

ג. $\frac{1-x^2}{1+x^2}=1$

ד. $\frac{1-x^2}{1+x^2}=5$. לכל x, $1-x^2 \le 1+x^2$. לכן, אם נרשום, למשל, באגף ימין מספר גדול מ- 1, למשוואה לא יהיה פתרון.

.4 א. $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2-1}$ $g(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$





ב. בשרטוט הימני רואים כי ערכי הפונקציה f הם תמיד -1 (אי- אפשר להבחין בנקודות שאינן בתחום הפונקציה).

במשימה 2 ראינו כי אם $f(x) = -1$ נקבל משוואה עם אינסוף פתרונות, אך כל יתר המספרים אינם נותנים פתרון.

בשרטוט השמאלי רואים כי ערך הפונקציה הוא שבר (חיובי או שלילי) או 0, או 1.

במשימה 3 ראינו כי אם נשווה את הפונקציה לשבר או ל- 0 נקבל משוואה בעלת שני פתרונות ואם נשווה את הפונקציה ל- 1 נקבל משוואה בעלת פתרון אחד.

5. א. הפתרון נכון. השבר הוא בין –1 (כולל –1) ל- 1.

ב. תשובה נכונה.

ג. התשובה איננה נכונה. אם x = 0 המונה והמכנה יהיו נגדיים והשבר ישווה ל- –1.

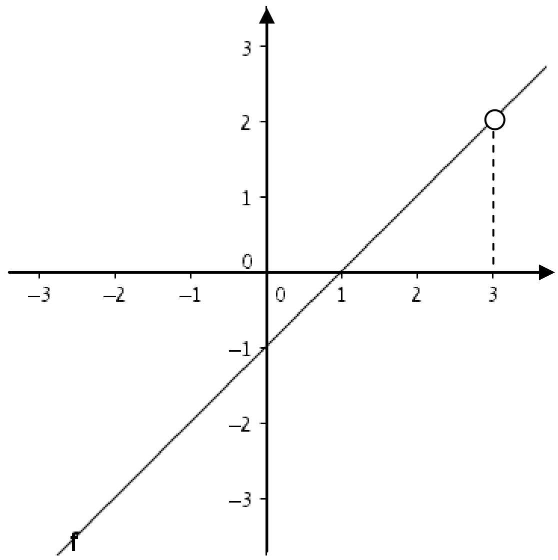
ד. תשובה נכונה.

ה. התשובה אינה נכונה. השברים יכולים להיות שווים גם אם המונים שווים ל- 0. במקרה זה המכנים אינם חייבים להיות שווים ובלבד שאף אחד מהם לא יהיה גם הוא 0 (כדי שהפתרונות יהיו בתחום ההצבה). ואמנם הפתרונות הם המספרים 3 ו- –3 המאפסים את המונים.

6. א.

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	–3	–2	–1	0	1

ג.



ד. בנקודה שבה x = 3 הפונקציה אינה מוגדרת לכן הישר אינו עובר דרכה.

ה. כן, כי לכל מספר פרט ל- 3 אפשר לצמצם את הביטוי האלגברי ולקבל ביטוי אלגברי של פונקציה קווית.

7. א. פרבולה $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$

ב. ישר $y=x-1$, $(x\neq 1)$

ג. ישר $y=x$, $(x\neq 2)$

ד. פרבולה $y=x^2-x$, $(x\neq -1)$

ה. פרבולה $y=x^2+1$, $(x\neq \pm 1)$

ו. פרבולה $y=x^2-1$

שומרים על כושר

1. א. $\frac{x^2-2x+1}{2}=0$

$\frac{(x-1)^2}{2}=0$

$x=1$

ב. $\frac{x^2-2x+1}{x-1}=0$

$\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$

אין פתרון

ג. $\frac{x^2-2x}{x-2}=0$

$\frac{x(x-2)}{x-2}=0$

$x=0$

ד. $\frac{x^3-x}{x+1}=0$

$\frac{x(x-1)((x+1)}{x+1}=0$

$x_1=0 \quad x_2=1$

ה. $\frac{x^4-1}{x^2-1}=0$

$\frac{(x^2-1)((x^2+1)}{x^2-1}=0$

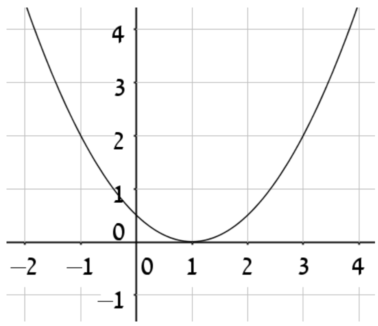
אין פתרון

ו. $\frac{x^4-1}{x^2+1}=0$

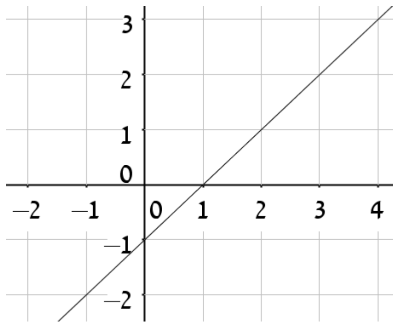
$\frac{(x^2-1)((x^2+1)}{x^2+1}=0$

$x=\pm 1$

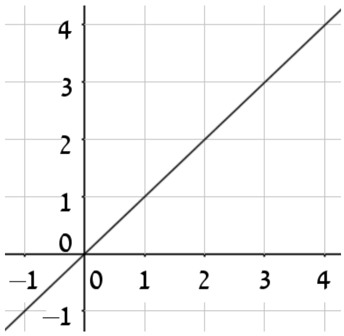
2. א.



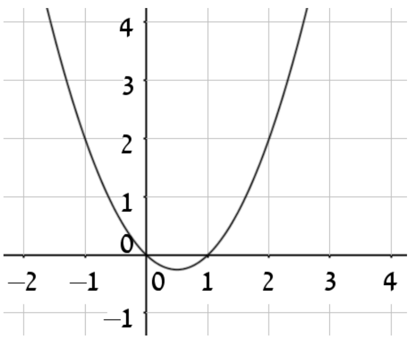
ב.



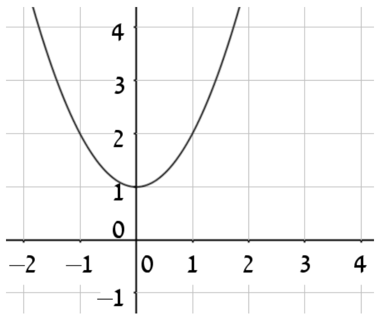
ג.



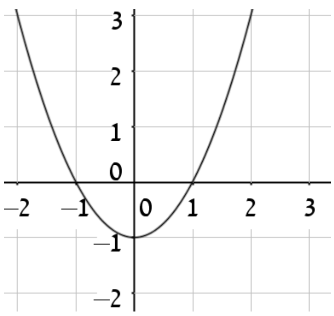
ד.



ה.



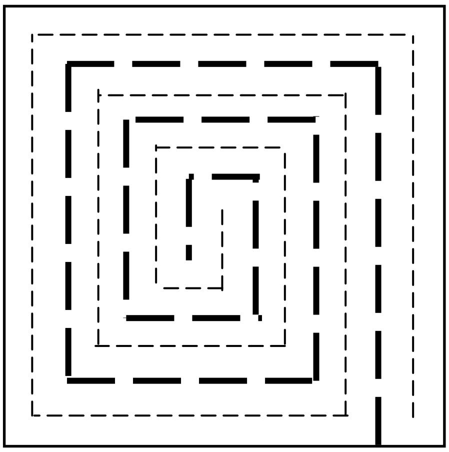
ו.



ברוב התוכנות הגרפיות המחשב אינו מראה על הגרף את הנקודות בהן הפונקציה אינה מוגדרת. לעיתים בהילוך על הגרף, אם מגיעים לנקודה כזו, המחשב מעיר על כך.

חידה

אם נחתוך את הנייר כמתואר בציור, תחילה לאורך הקו המרוסק העבה, ואחר-כך לאורך הקו המרוסק הדק, תיווצר רצועת נייר דקה היוצרת מעגל גדול דיו.



למסיימים

1. כתבו משוואה שבה אגף אחד הוא שבר אלגברי ואגף שני הוא מספר כך ש:

   א. לא יהיה לה פתרון

   ב. יהיה לה פתרון אחד

   ג. יהיו לה שני פתרונות.

   ד. יהיו לה אינסוף פתרונות.

תשובות

התשובות תהיינה מגוונות. כדאי להיעזר בדוגמאות מן הפעילות

לסיכום

- מתייחסים לתחום הצבה של משוואה. אם אין רושמים אותה מיד, היא עלולה להישכח בהמשך למשל, אחרי צמצום
- משווים בין פתרון משוואות בדרך סטנדרטית לפתרון על-פי שיקולים, ובודקים את היתרונות והחסרונות של כל אחת מהדרכים.
- מתייחסים לפעולת הצמצום במשוואה כפעולה התורמת ליעילות בפתרונה