3.2 משוואות ריבועיות

מטרות

- העמקה בנושא פתרון משוואות ריבועיות
- קישור בין התחום הגרפי והאלגברי
- התייחסות לדרכי פתרון שונות ויעילותן
- התייחסות למספר הפתרונות של משוואה ריבועית
- הכרת ההיסטוריה של פתרון משוואות

אמצעי עזר

תוכנה המשרטטת גרפים (*Geogebra*),

פתיחה

קוראים ביחד עם התלמידים את הטקסט שבפתיח, מבקשים מהם לפתור שאלה 1, ומציגים את דרכי הפתרון כדי שכולם יחשפו לכל הדרכים לפתירת המשוואה שעלו בכיתה.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת בפתרון משוואות ריבועיות בדרכים שונות. מתחילים עם דרך הפתרון ההיסטורית של אלחוואריזמי הנעזרת בשרטוט. דרך הפתרון האלגברית התואמת לדרך זו היא השלמה לריבוע. החיסרון בהסתמכות על שרטוט ועל אורכי קטעים הוא ההגבלה לפתרונות חיוביים. בהמשך מובאות משוואות שבהן אפשר להחליף ביטוי החוזר על עצמו במשתנה. כדי להיווכח שהדרך המוצגת פה היא אכן יעילה יותר, כדאי לתת לתלמידים לפתור בדרך של פישוט את אחת המשוואות המסובכות מסוג זה (למשל המשוואה האחרונה במשימה 4 סעיף ד).

1. הדרכים המקובלות הן:

השלמה לריבוע

$$x^2+10x=39$$
$$(x+5)^2=64$$
$$x+5=\pm 8$$
$$x_1=3 \quad x_2=-13$$

פירוק לגורמים

$$x^2+10x=39$$
$$x^2+10x-39=0$$
$$(x+13)(x-3)=0$$
$$x_1=-13 \quad x_2=3$$

נוסחת השורשים

$$x^2+10x=39$$
$$x^2+10x-39=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{100+156}}{2}=$$
$$x_{1,2}=\frac{-10\pm 16}{2}$$
$$x_1=3 \quad x_2=-13$$

2. א. הצורה מורכבת מריבוע ששטחו x^2 י"ר ושני מלבנים ששטח כל אחד מהם 5x י"ר.

שטח הצורה $x^2 + 10x$ י"ר. לפי המשוואה נתונה הוא שווה ל- 39.

ב. שטח הריבוע הנוסף (הריק) הוא 25 י"ר. לכן שטח הריבוע השלם הוא $x^2 + 10x + 25$ או $39 + 25$

המשוואה: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$

ג. פתרון המשוואה: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$

$(x + 5)^2 = 64$

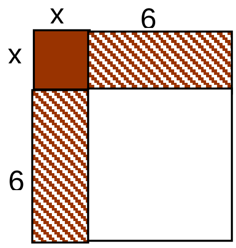
$x + 5 = \pm 8$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -13$

קיבלנו למשוואה אותו פתרון שקיבלנו במשימה 1, אבל בהתייחס לבעיה שפתרנו, פתרון שלילי אינו בא בחשבון, כי x מייצג אורך של צלע.

3. המשוואה: $x^2 + 12x = 160$

השרטוט המתאים:



המשוואה: $x^2 + 12x + 36 = 160 + 36$

פתרון: $(x + 6)^2 = 196$

$x + 6 = \pm 14$

$x_1 = 8 \quad x_2 = -20$

הפתרון המתאים לשרטוט הוא הפתרון החיובי בלבד – 8.

4. לאחר פתרון המשוואה הראשונה בכל מקבץ, בכל המשוואות האחרות מספיק להשוות את הפתרונות לביטוי האלגברי היכול לשמש כמשתנה במשוואה ריבועית.

א. $x^2 - 2x = 8$ $(x-1)^2 = 9$ $x - 1 = \pm 3$ $x_1 = 4 \quad x_2 = -2$	ג. $x^2 - 8x = -16$ $(x-4)^2 = 0$ $x - 4 = 0$ $x = 4$
$(4x)^2 - 2(4x) = 8$ $4x = 4 \quad 4x = -2$ $x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$	$(4x)^2 - 8(4x) = -16$ $4x = 4$ $x = 1$
$(\frac{1}{2}x)^2 - x = 8$ $\frac{1}{2}x = 4 \quad \frac{1}{2}x = -2$ $x_1 = 8 \quad x_2 = -4$	$(x^2)^2 - 8x^2 = -16$ $x^2 = 4$ $x = \pm 2$
$(x-1)^2 - 2(x-1) = 8$ $x - 1 = 4 \quad x - 1 = -2$ $x_1 = 5 \quad x_2 = -1$	$(x-3)^2 - 8(x-3) = -16$ $x - 3 = 4$ $x = \frac{4}{3}$

ב. $x^2 - x = 12$ $(x-0.5)^2 = 12.25$ $x - 0.5 = \pm 3.5$ $x_1 = 4 \quad x_2 = -3$	ד. $x^2 - 10x = -9$ $(x-5)^2 = 16$ $x - 5 = \pm 4$ $x_1 = 9 \quad x_2 = 1$
$(4x)^2 - 4x = 12$ $4x = 4 \quad 4x = -3$ $x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{3}{4}$	$(4x)^2 - 10(4x) = -9$ $4x = 9 \quad 4x = -1$ $x_1 = \frac{9}{4} \quad x_2 = -\frac{1}{4}$
$x \neq 0, \quad (\frac{1}{x})^2 - \frac{1}{x} = 12$ $\frac{1}{x} = 4 \quad \frac{1}{x} = -3$ $x_1 = \frac{1}{4} \quad x_2 = -\frac{1}{3}$	$(9x^2)^2 - 90x^2 = -9$ $9x^2 = 9 \quad 9x^2 = 1$ $x_{1,2} = \pm 1 \quad x_{3,4} = \pm \frac{1}{3}$
$(2x-1)^2 - 2x + 1 = 12$ $2x - 1 = 4 \quad 2x - 1 = -3$ $x_1 = 2.5 \quad x_2 = -1$	$x \neq 1, \quad (\frac{x}{x-1})^2 - 10(\frac{x}{x-1}) = -9$ $\frac{x}{x-1} = 9 \quad \frac{x}{x-1} = 1$ $x = 9x - 9 \quad x = x - 1$ $x = \frac{9}{8}$ אין פתרון

.5

א. $x^2 - 5x + 6 = 0$ $(x-3)(x-2) = 0$ $x_1 = 3 \quad x_2 = 2$	ג. $x^2 - 10x + 9 = 0$ $(x-1)(x-9) = 0$ $x_1 = 1 \quad x_2 = 9$
$(\frac{x}{2})^2 - 5(\frac{x}{2}) + 6 = 0$ $\frac{x}{2} = 3 \quad \frac{x}{2} = 2$ $x_1 = 6 \quad x_2 = 4$	$(9x)^2 - 10(9x) + 9 = 0$ $9x = 1 \quad 9x = 9$ $x_1 = \frac{1}{9} \quad x_2 = 1$
$(x^2+2)^2 - 5(x^2+2) + 6 = 0$ $x^2 + 2 = 3 \quad x^2 + 2 = 2$ $x_{1,2} = \pm 1 \quad x_3 = 0$	$(-x^2+1)^2 - 10(-x^2+1) + 9 = 0$ $-x^2 + 1 = 1 \quad -x^2 + 1 = 9$ $x = 0$ אין פתרון
$x \neq 1, \quad (\frac{1}{x-1})^2 - \frac{5}{x-1} + 6 = 0$ $\frac{1}{x-1} = 3 \quad \frac{1}{x-1} = 2$ $x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = 1.5$	$x \neq 0, \quad (\frac{1}{x^2})^2 - \frac{10}{x^2} + 9 = 0$ $\frac{1}{x^2} = 1 \quad \frac{1}{x^2} = 9$ $x_{1,2} = \pm 1 \quad x_{3,4} = \pm \frac{1}{3}$

ב. $x^2 - 23x - 50 = 0$ $(x-25)(x+2) = 0$ $x_1 = 25 \quad x_2 = -2$	ד. $x^2 - 5x = 14$ $(x-7)(x+2) = 0$ $x_1 = 7 \quad x_2 = -2$
$(x^2)^2 - 23x^2 - 50 = 0$ $x^2 = 25 \qquad x^2 = -2$ $x_{1,2} = \pm 5$ אין פתרון	$(7x)^2 - 5(7x) = 14$ $7x = 7 \quad 7x = -2$ $x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{2}{7}$
$x \neq 0, \quad (\frac{1}{x^2})^2 - 23(\frac{1}{x^2}) - 50 = 0$ $\frac{1}{x^2} = 25 \qquad \frac{1}{x^2} = -2$ $x_{1,2} = \pm\frac{1}{5}$ אין פתרון	$(x^2-3)^2 - 5(x^2-3) = 14$ $x^2 - 3 = 7 \quad x^2 - 3 = -2$ $x = \pm\sqrt{10} \qquad x = \pm 1$
$x \neq 0, \quad (\frac{1}{x})^2 - 23(\frac{1}{x}) - 50 = 0$ $\frac{1}{x} = 25 \quad \frac{1}{x} = -2$ $x_1 = \frac{1}{25} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$	$x \neq 6, \quad (\frac{x}{x-6})^2 - 5(\frac{x}{x-6}) = 14$ $\frac{x}{x-6} = 7 \qquad \frac{x}{x-6} = -2$ $x_1 = 7 \qquad x_2 = 4$

6. א. $(x^2+1)^2 - 36(x^2+1) + 260 = 0$

$x^2 + 1 = z$

$z^2 - 36z + 260 = 0$

$(z-26)(z-10) = 0$

$z_1 = 26 \qquad z_2 = 10$

$x^2 + 1 = 26 \qquad x^2 + 1 = 10$

$x^2 = 25 \qquad x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 5 \qquad x_{3,4} = \pm 3$

ב. $x \neq \pm 1, \quad \frac{3}{x^2-1} + 2 = x^2 - 1$

$x^2 - 1 = z$

$z \neq 0, \quad \frac{3}{z} + 2 = z$

$3 + 2z = z^2$

$z^2 - 2z - 3 = 0$

$(z-3)(z+1) = 0$

$z_1 = 3 \qquad z_2 = -1$

$x^2 - 1 = 3 \quad x^2 - 1 = -1$

$x^2 = 4 \qquad x^2 = 0$

$x_{1,2} = \pm 2 \quad x_3 = 0$

7. דוגמאות

א. $(x+3)^2 = -10$

ב. $(x+3)^2 = 0$

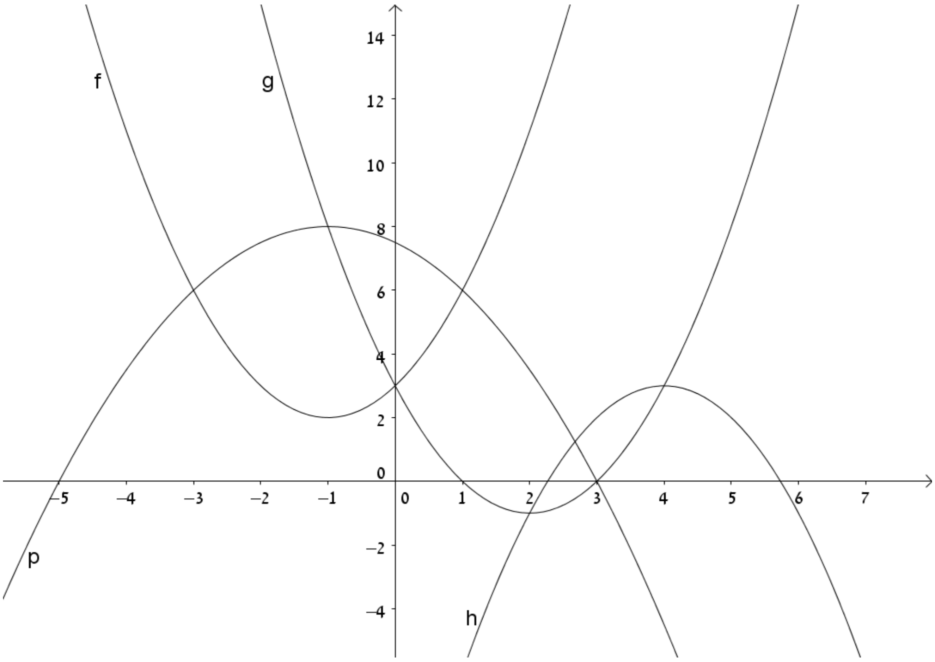
ג. $(x+3)^2 = 16$

ד. $(x+2)(x+7) = 0$

ה. $(x-2)(x+7) = 0$

ו. $(x^2-25)(x^2-64) = 0$

8. I.



II. א. $f(x) = g(x)$ $x = 0$

ב. $p(x) = g(x)$ $x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

ג. $h(x) = g(x)$ $x_1 = 2 \quad x_2 = 4$

III. $p(x) = h(x)$

בגרף רואים פתרון אחד.

סידור המשוואה נותן: $x^2 - 18x + 39 = 0$

חישוב המספר שמתחת לשורש בנוסחת השורשים (הדיסקרימיננטה): $18^2 - 4 \cdot 39 > 0$

לכן יש שני פתרונות למשוואה.

לא ראינו את הפתרון השני כי שרטטנו רק חלק מהגרף.

כדאי להפנות תשומת לב התלמידים לכך שבכל שרטוט משורטט רק חלק מהגרף. לכן כדי להחליט איזה חלק מהגרפים ישורטט כדאי להפעיל מראש שיקולים, ולא להתבסס רק על מה שרואים בשרטוט.

למשל, כדאי להתבונן בקצב השינוי של הפונקציות, במיקום של אחת יחסית לשניה ובכיוון הפתיחה שלהן. לפי הפרמטרים האלה אפשר לזהות אם תהיה נקודת מפגש והיכן בערך. במקרה שלנו רואים נקודת מפגש אחת. שתי הפונקציות p ו- h פתוחות כלפי מטה, לפי המיקום היחסי שלהן ולפי קצב השינוי שלהן ניתן להסיק כי תהיה נקודת מפגש נוספת. הענף הימני של הפונקציה h שקצב השינוי שלה גדול יותר ייפגש עם הענף הימני של הפונקציה p.

לעומת זאת, אם קצב השינוי של שתי פונקציות שווה, תהיה לכל היותר נקודת מפגש אחת. במקרה כזה לשתי הפונקציות יש אותו מקדם a. בתהליך פתרון משוואה כזאת המחוברים המכילים את x^2 מתבטלים ומתקבלת משוואה ממעלה ראשונה שיש לה לכל היותר פתרון אחד.

הפתרונות הם: $x_2 = 9 - \sqrt{40} \quad x_1 = 9 + \sqrt{40}$

IV. $f(x) = p(x)$

$$(x+1)^2 + 2 = -0.5(x+1)^2 + 8$$

הפתרונות הם: $x_2 = 1 \quad x_1 = -3$

V. $f(x) = h(x)$ כי לגרפים אין נקודת מפגש.

$$(x+1)^2 + 2 = -(x-4)^2 + 3$$

ואמנם, סידור המשוואה ייתן: $2x^2 - 6x + 16 = 0$ ו הדיסקרימיננטה שלילית.

גילי הוא 36.

אם מדובר בגיל קטן מ- 120 שנה, תנאי הבעיה מכתיבים שהגיל הוא מספר דו-ספרתי.

נסמן ב- x את ספרת העשרות וב- y את ספרת האחדות.

$10x + y = 2xy$, $1 \le x \le 9 \quad 0 \le y \le 9$ שניהם שלמים

$2xy - y = 10x$

$y(2x - 1) = 10x$

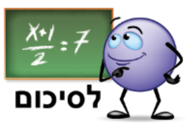
כאשר x שלם $2x - 1$ אי-זוגי. אגף ימין זוגי לכן y חייב להיות זוגי.

אגף ימין מתחלק ב- 5 לכן גם אגף שמאל צריך להתחלק ב- 5. y אינו יכול להתחלק ב- 5 כי הוא קטן מ- 10 וזוגי. לכן $2x - 1$ מתחלק ב- 5.

האפשרויות היחידות עבור $x < 10$ הן $2x - 1 = 5$ או $2x - 1 = 15$ לכן $x = 3$ או $x = 8$

לכן אגף ימין הוא 30 או 80.

$5y = 30$ או $15y = 80$. רק האפשרות הראשונה באה בחשבון. לכן $y = 6$



- מתייחסים לדרכים השונות לפתרון משוואות
- מתייחסים ליעילות בדרכים השונות של הפתרון.
- מתייחסים ליתרונות ולחסרונות בפתרון גרפי של משוואות
- מתייחסים למספר הפתרונות של משוואה ריבועית
- מתייחסים לדרך שבה התפתחה האלגברה לאורך ההיסטוריה. ניתן לבחור מן המאמר באתר של "קשר חם" בקישור הבא: http://highmath.haifa.ac.il/data/sadnaot/sadna18.pdf