

3.2 משוואות ריבועיות



אלחואריזמי היה מתמטיקאי ערבי, שחי במאה התשיעית לספירה. הוא ידוע כאחד התורמים לבניית יסודות האלגברה. בספרו מתאר אלחואריזמי דרך מעניינת לפתרון משוואה ריבועית.

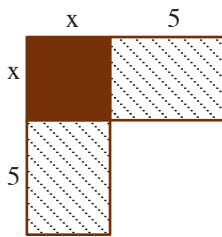
לדוגמה הוא פותר את המשוואה $x^2 + 10x = 39$.

נעקוב אחרי דרך הפתרון של אלחואריזמי ונפתור משוואות בדרכים שונות.

פתרון משוואה בעקבות אלחואריזמי

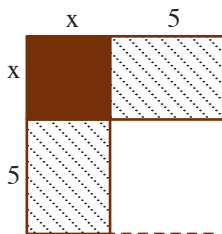
1. פתרו את המשוואה $x^2 + 10x = 39$ בכל הדרכים שאתם מכירים.

2. הגישה הגיאומטרית הבאה לפתרון המשוואה $x^2 + 10x = 39$ שקולה לאחת מדרכי הפתרון של אלחואריזמי. עקבו אחריה ונסו להבין אותה.



• שרטטו ריבוע שאורך צלעו x (הריבוע המלא).

• הוסיפו אל הריבוע שני מלבנים משני צדיו (המלבנים המקווקווים), שאורך אחת הצלעות של כל אחד מהם היא 5 יחידות.



• השלימו את השרטוט לריבוע בעזרת תוספת ריבוע (הריבוע הריק).

א. שטח הצורה שווה ל-39. הסבירו.

ב. הביעו את שטח הריבוע השלם בשתי דרכים, ורשמו משוואה מתאימה.

ג. האם פתרון המשוואה לפי השיטה הגיאומטרית של אלחואריזמי זהה לפתרון המשוואה שמצאתם במשימה 1?

3. מצאו בשיטת אלחואריזמי את הפתרון החיובי של המשוואה $x^2 + 12x = 160$.



הספר שבו מתאר אלחואריזמי דרכים לפתרון משוואות נקרא **אלג'בר ואלמוקאבלה**. המילה "אלג'בר" שימשה את אלחואריזמי לתיאור הפעולה של העברת איברים מאגף לאגף במשוואה, והמילה אלמוקאבלה שימשה אותו לתיאור פעולת כינוס האיברים הדומים. השם אלגברה שבו אנו מכנים עד היום את כל הענף במתמטיקה שעוסק בין היתר בפתרון משוואות, נגזר מן המילה אלג'בר.

אלחואריזמי לא השתמש במספרים שליליים לכן התאימה לו דרך הפתרון המתוארת למעלה.

פתרון משוואות על-ידי שיקולים

4. פתרו את המשוואה הראשונה בכל רביעייה על-ידי השלמה לריבוע.

פתרו את שאר המשוואות.

$$x^2 - 8x = -16 \quad \text{ג.}$$

$$(4x)^2 - 8(4x) = -16$$

$$(x^2)^2 - 8x^2 = -16$$

$$(x-3)^2 - 8(x-3) = -16$$

$$x^2 - 2x = 8 \quad \text{א.}$$

$$(4x)^2 - 2(4x) = 8$$

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - x = 8$$

$$(x-1)^2 - 2(x-1) = 8$$

$$x^2 - 10x = -9 \quad \text{ד.}$$

$$(4x)^2 - 10(4x) = -9$$

$$(9x^2)^2 - 90x^2 = -9$$

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{x-1}\right) = -9$$

$$x^2 - x = 12 \quad \text{ב.}$$

$$(4x)^2 - 4x = 12$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} = 12$$

$$(2x-1)^2 - 2x+1 = 12$$

5. פתרו את המשוואה הראשונה בכל רביעייה על-ידי פירוק לגורמים.

פתרו את שאר המשוואות.

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \quad \text{ג.}$$

$$(9x)^2 - 10(9x) + 9 = 0$$

$$(-x^2 + 1)^2 - 10(-x^2 + 1) + 9 = 0$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{10}{x^2} + 9 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{א.}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{2}\right) + 6 = 0$$

$$(x^2 + 2)^2 - 5(x^2 + 2) + 6 = 0$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - \frac{5}{x-1} + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x = 14 \quad \text{ד.}$$

$$(7x)^2 - 5(7x) = 14$$

$$(x^2 - 3)^2 - 5(x^2 - 3) = 14$$

$$\left(\frac{x}{x-6}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{x-6}\right) = 14$$

$$x^2 - 23x - 50 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$(x^2)^2 - 23x^2 - 50 = 0$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - 23\left(\frac{1}{x^2}\right) - 50 = 0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 23\left(\frac{1}{x}\right) - 50 = 0$$

פתרון משוואות על-ידי הצבת משתנה חדש

6. א. נסו לפתור את המשוואה הבאה כמשוואה ריבועית.

$$(x^2 + 1)^2 - 36(x^2 + 1) + 260 = 0$$

רמז: הציבו z במקום $x^2 + 1$.

ב. נסו לפתור את המשוואה הבאה כמשוואה ריבועית.

$$\frac{3}{x^2 - 1} + 2 = x^2 - 1$$

רמז: הציבו z במקום $x^2 - 1$.

7. א. כתבו משוואה ריבועית שאין לה פתרון.

ב. כתבו משוואה ריבועית שיש לה פתרון אחד.

ג. כתבו משוואה ריבועית שיש לה שני פתרונות.

ד. כתבו משוואה ריבועית ששני פתרונותיה הם מספרים שליליים.

ה. כתבו משוואה ריבועית שאחד מפתרונותיה חיובי והאחר שלילי.

ו. כתבו משוואה שיש לה ארבעה פתרונות.



8. נתונות הפונקציות

$$h(x) = -(x - 4)^2 + 3$$

$$f(x) = (x + 1)^2 + 2$$

$$p(x) = -0.5(x + 1)^2 + 8$$

$$g(x) = (x - 1)(x - 3)$$

I. שרטטו באמצעות מחשב את הגרפים של הפונקציות.

II. פתרו בדרך גרפית את המשוואות הבאות:

א. $(x + 1)^2 + 2 = (x - 1)(x - 3)$

ב. $-0.5(x + 1)^2 + 8 = (x - 1)(x - 3)$

ג. $-(x - 4)^2 + 3 = (x - 1)(x - 3)$

III. כמה פתרונות יש למשוואה $-(x - 4)^2 + 3 = -0.5(x + 1)^2 + 8$? מהם?

IV. כתבו משוואה נוספת באמצעות הפונקציות הנתונות כך שפתרונותיה יהיו שלמים, ופתרו אותה.

V. כתבו משוואה שאין לה פתרון באמצעות הפונקציות הנתונות.



גילי הוא כפליים ממכפלת שתי הספרות המרכיבות אותו.

בת כמה אני?