



# יחידה 3: טכניקה אלגברית

## 3.1 הפרש ריבועים

לפניכם ארבע דוגמאות של הפרש ריבועים של מספרים עוקבים:

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$11^2 - 10^2 = 21$$

$$14^2 - 13^2 = 27$$

א. מצאו שתי דוגמאות נוספות של הפרש ריבועים של מספרים עוקבים.

ב. הסיקו מסקנה לגבי הפרש ריבועים של מספרים עוקבים.

שימו לב לקשר בין המספרים לתוצאה.

**נחקור הפרשי ריבועים שונים.**

### הפרש ריבועים של מספרים עוקבים

1. א. הוכיחו את המסקנה שהסקתם בפתיח הפעילות.

ב. נתונה רשימה של מספרים: 1124 323 327 126 27 24 8 7

קבעו בכל מקרה אם ניתן לכתוב את המספר כהפרש ריבועים של שני מספרים עוקבים.

אם כן, כתבו אותם בצורה זאת.

אם לא, הסבירו.

### הפרש ריבועים של מספרים בדילוג 2 או יותר

2. לפניכם דוגמאות של הפרשי ריבועים

#### הפרש ריבועים של מספרים בדילוג 3

$$6^2 - 3^2 = 27$$

#### הפרש ריבועים של מספרים בדילוג 2

$$6^2 - 4^2 = 20$$

א. רשמו במחברת ארבע דוגמאות נוספות לכל טור.

ב. הסיקו מסקנה לגבי הפרש ריבועים של מספרים בדילוג 2 ולגבי הפרש ריבועים של מספרים

בדילוג 3. **שימו לב** לקשר בין המספרים לתוצאה.

ג. הוכיחו את מסקנותיכם.

ד. שערנו ללא חישוב מה יהיה הפרש הריבועים של מספרים בדילוג 6, למשל  $18^2 - 12^2$ .

הסבירו על מה מסתמכת השערתכם.

ה. חשבו בעל-פה:  $23^2 - 22^2$ ,  $23^2 - 21^2$ ,  $23^2 - 20^2$ ,  $23^2 - 19^2$

## מסקנות נוספות על הפרש ריבועים של מספרים עוקבים

3. הוכיחו בחמש הדרכים הבאות כי הפרש ריבועים של מספרים עוקבים הוא תמיד אי-זוגי.

א. בעזרת שיקולי זוגיות ואי-זוגיות.

ב. בעזרת הנוסחה  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  ובשיקולי זוגיות ואי-זוגיות.

ג. בדרך אלגברית בעזרת הנוסחה  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ .

ד. בדרך אלגברית בעזרת הנוסחה  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

ה. בעזרת סדרת הנקודות הבאה:



4. ניתן לכתוב כל מספר אי-זוגי כהפרש בין שני ריבועים של מספרים עוקבים.

נתון מספר אי-זוגי, למשל 47. הראו שיטה למציאת המספרים העוקבים שהפרש הריבועים שלהם הוא 47 (או כל מספר אי-זוגי אחר).

## הפרש ריבועים של שני מספרים כלשהם

5. א. באילו מקרים ההפרש בין ריבועי המספרים הוא אי-זוגי? באילו מקרים הוא זוגי?

ב. השלימו טבלה כמו זו במחברת במילים **זוגי**, **אי-זוגי**.

|   |         | b           |         |
|---|---------|-------------|---------|
|   |         | $a^2 - b^2$ | אי-זוגי |
| a | זוגי    |             |         |
|   | אי-זוגי |             |         |

6. הוכיחו שאם שני מספרים הם זוגיים, או שניהם אי-זוגיים, הפרש הריבועים שלהם הוא כפולה של 4.

7. מהם המספרים **שאי-אפשר** להביעם כהפרש של שני ריבועים? הסבירו מדוע.

8. אילו מהמספרים הבאים **לא** ניתנים לכתיבה כהפרש ריבועים?

23    24    25    26    50    51    60

## מספר כהפרש ריבועים בדרכים שונות

9. הוכיחו כי כל מספר ראשוני (פרט ל-2) ניתן לכתיבה כהפרש ריבועים של שני מספרים טבעיים בדרך אחת בלבד – כהפרש ריבועים של שני מספרים עוקבים.

10. א. בכמה דרכים שונות תוכלו לכתוב את 36 כהפרש ריבועים?  
ב. בכמה דרכים שונות תוכלו לכתוב את 30 כהפרש ריבועים?  
ג. בכמה דרכים שונות תוכלו לכתוב את 21 כהפרש ריבועים?  
ד. בכמה דרכים שונות תוכלו לכתוב את 120 כהפרש ריבועים?  
התוכלו להוכיח כי מצאתם את כל הדרכים?



11. הכינו טבלה בגיליון אלקטרוני (למשל, Excel) כדוגמת טבלת כפל לפעולה  $a^2 - b^2$  באופן הבא.  
א. הפכו את תאי הטבלה לריבועים.

ב. רשמו ככותרת בתא A1 את הפעולה  $a^2 - b^2$ .

ג. הכניסו לעמודה השמאלית מספרים עוקבים מ-0 עד 12. עמודה זו תייצג את a.

ד. הכניסו לשורה העליונה מספרים עוקבים מ-0 עד 12. שורה זו תייצג את b.

ה. הכניסו לתא B2 את הנוסחה:  $=A2^2 - B1^2$  נוסחה זו תייצג את הפעולה  $a^2 - b^2$ .

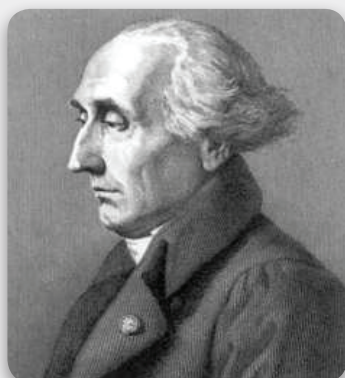
ו. גררו את הנוסחה לאורך עמודה ואחר גררו את כל העמודה לאורך השורות.

המספר בכל תא מייצג את הפעולה  $a^2 - b^2$  בין המספר a שבעמודה השמאלית לבין המספר b שבשורה העליונה (כמו בלוח כפל).

ז. מחקו את המספרים השליליים מן הטבלה.

12. א. היכן בטבלה נמצאים המספרים שהם הפרשי ריבועים של מספרים שווים? הפרשי ריבועים של מספרים עוקבים? הפרשי מספרים בדילוגים של 2?

ב. מצאו בטבלה את התופעות שמצאתם בחקירתכם.



משפטים רבים בתורת המספרים עוסקים בריבועי מספרים שלמים. אחד המשפטים האלה הוא המשפט המפתיע שנקרא משפט ארבעת הריבועים, הטוען כי כל מספר טבעי ניתן לכתיבה כסכום של ארבעה ריבועים של מספרים שלמים. את המשפט הוכיח בשנת 1770 ז'וזף לואי לגרנז' (Joseph-Louis Lagrange 1736-1813). לגרנז' היה מתמטיקאי ואסטרונום איטלקי שעבר לחיות בצרפת ובפרוסיה. פטרונו של לגרנז' במשך 20 שנה היה מלך פרוסיה פרידריך השני. המלך כינה את לגרנז' בשם "גדול המתמטיקאים באירופה".



### שומרים על כושר

1. לפניכם חלק ממבחן פתור של **אורן** שבו התבקש לפשט את הביטויים האלגבריים, אם אפשר. **אורן** השתמש באותה שיטת פתרון שגויה בכל התרגילים.

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{x^2-4}{x+2} = x-2 \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x-3} = x+3 \\ \text{ג.} & \frac{x^2+16}{x-4} = x-4 \\ \text{ד.} & \frac{x^2+25}{x+5} = x+5 \end{array}$$

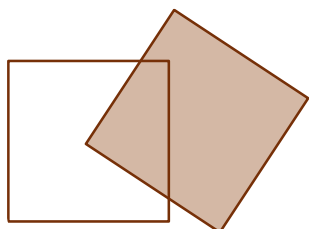
- התוכלו לגלות את שיטת הפתרון השגויה של אורן?
- באילו תרגילים קיבל אורן תוצאה נכונה למרות שיטת הפתרון שלו?

2. רשמו את תחום ההצבה וצמצמו, אם אפשר.

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x^2-1}{x+1} & \text{ה.} & \frac{x^3-x}{x-1} & \text{ט.} & \frac{x^4-x^2}{x-1} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-x}{x+1} & \text{ו.} & \frac{x^3-x}{x} & \text{י.} & \frac{x^4-x^2}{x+1} \\ \text{ג.} & \frac{x^2-x}{x-1} & \text{ז.} & \frac{x^3-x}{x+1} & \text{יא.} & \frac{x^4-x^2}{x^2+1} \\ \text{ד.} & \frac{x^2-x}{x} & \text{ח.} & \frac{x^3-x}{x^2-1} & \text{יב.} & \frac{x^4-x^2}{x^2+x} \end{array}$$

3. לאחר שקיבל את המבחן בחזרה, אמר **אורן** (אורן מהמשימה הקודמת): אם יש במונה או במכנה של שבר פעולת חיבור או חיסור, אסור לצמצם. האם אורן צודק?

חידה



מניחים שני ריבועים זהים זה על גבי זה באופן שאחד הקדקודים של הריבוע העליון נמצא במרכז הריבוע התחתון.

איזה חלק מן הריבוע התחתון מכוסה על-ידי הריבוע העליון?