

## 2.3 זהירות: מסיקים מסקנות



- בדיקת טענות או אמירות על-סמך חישובים הסתברותיים.
- שימוש במודל השטח או במודל העץ לפתרון שאלות בהסתברות ולהסקת מסקנות.
- פיתוח חשיבה ביקורתית לגבי טענות והיסקים.
- יצירת איזון בין האינטואיציה וחשיבה מבוקרת, ופיתוח ההבנה שהאינטואיציה לא תמיד עובדת כשדנים בהסתברות.
- הבנה של קשר סיבתי בין תופעות, והבנה כי בהיעדר נתונים מספיקים, עלולים להגיע למסקנות שגויות.



אין



- מציגים את הסיפור שבפתיחה. מציגים את תוצאות המחקר ומבקשים מהתלמידים לשער אם לפי הממצאים אפשר להסיק שהכנת שיעורי בית מבטיחה הצלחה במבחנים.
- שומעים את השערות התלמידים כולל נימוקים. הנימוקים יכולים להיות מסוגים שונים:
- נימוקים מתוך העולם הסובב אותם.
  - נימוקים על-סמך חישובים.



הפעילות עוסקת בקביעה אם ניתן להסיק או לא ניתן להסיק מסקנות על-סמך נתונים מספריים. במשימות 1 – 3 ישנם נתונים מספריים ויש לקבוע על-סמך חישוב יחס אם ניתן להסיק טענות מהנתונים. במשימות 4 – 6 קובעים אם יש קשר סיבתי בין שתי עובדות ואם ניתן להסיק מקשר זה מסקנות. הסקת מסקנות נעשית בדרך כלל באמצעות התרשמות אינטואיטיבית, כאשר אנו מצרפים את המידע שלפנינו ומגיעים למסקנות באופן אינטואיטיבי. במקרים רבים מגיעים למסקנה נכונה ולעיתים האינטואיציה גורמת להטיות בשקלול הנתונים ולהסקת מסקנות שגויות. לא תמיד ניתן להשתמש בחישובים. מטרת השאלות שבפעילות להראות שבהיעדר נתונים מספיקים, עלולים להגיע למסקנות שגויות.

### הסקת מסקנות על-סמך חישוב יחסים

1. א. 600 תלמידים הצליחו במבחן, מתוכם 360 תלמידים הכינו שיעורים. החלק המתאים:  $\frac{360}{600} = \frac{3}{5}$ .

ב. 400 תלמידים נכשלו במבחן, מתוכם 240 תלמידים הכינו שיעורים. החלק המתאים:  $\frac{240}{400} = \frac{3}{5}$ .

ג. חלק התלמידים שהצליחו במבחן מבין אלה שלא הכינו שיעורים הוא  $\frac{240}{400} = \frac{3}{5}$ .

חלק התלמידים שהצליחו במבחן מבין אלה שהכינו שיעורים הוא  $\frac{360}{600} = \frac{3}{5}$ .

אין הבדל במצליחים בין אלה שהכינו שיעורים לבין אלה שלא הכינו שיעורים (בשני המקרים 60%), ולכן לא ניתן להסיק שהכנת שיעורים מבטיחה הצלחה במבחנים.

## 2. א.

נשים			גברים			
% המתקבלים	התקבלו	הגישו	% המתקבלים	התקבלו	הגישו	
80%	72	90	60%	360	600	בחברות מסחריות
32%	96	300	35%	112	320	בהיי-טק
43.1%	168	390	51.3%	472	920	סך-הכול

ב. גם יעל וגם דני צודקים בנתונים שהם מציגים, אך אי-אפשר להסיק אם קיימת או לא קיימת אפלייה בהעסקת נשים.

לפי יעל – אחוז הנשים שהתקבלו בסך-הכול לעבודה במחשבים (43%) נמוך מאחוז הגברים (51.3%). אפשר להסביר את הרושם שהתקבל אצל יעל בכך שיש פחות נשים (390 נשים לעומת 920 גברים) שהגישו מועמדות לעבודה במחשבים.

לפי דני – כשבודקים לגבי כל תחום בנפרד (60% גברים לעומת 80% נשים בחברות המסחריות, ובחברות ההייטק אין כמעט הבדל) רואים מצב הפוך.

כלומר, מהנתונים רואים כי פחות נשים פנו לעבודה בחברות מסחריות (ולכן למרות שמספר הנשים שהתקבלו יחסית קטן, האחוז של המתקבלות יחסית גבוה), כשבחברות ההייטק מספר הנשים כמעט זהה למספר הגברים (ולכן גם מספרי הנשים והגברים שהתקבלו וגם אחוזיהם כמעט זהים).

3. - 40 מורים השתמשו במחשב לחקר, ומתוכם 30 מורים חושבים שהשימוש יעיל – כלומר מבין המורים

שהשתמשו במחשב לחקר, ההסתברות לבחור מורה שחושב שהוא יעיל היא  $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ . לכן ניתן להסיק כי

השימוש במחשב לצרכי חקר הוא יעיל.

- מתוך 60 מורים שהשתמשו במחשב לתרגול, 10 מורים חושבים שהשימוש יעיל – כלומר מבין המורים

שהשתמשו במחשב לתרגול ההסתברות לבחור מורה שחושב שהוא יעיל היא  $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ . לכן ניתן להסיק כי

השימוש במחשב לתרגול אינו יעיל.

- נדב אינו צודק. אמנם רק  $\frac{2}{5}$  מהמורים טענו שהשימוש יעיל, אך זאת תוך התעלמות מן השאלה לאיזו מטרה

המחשב יעיל. אם יש מטרות שונות לשימוש, אין טעם להתייחס ליעילות באופן כללי.

## קשר סיבתי בהסקת מסקנות

4. ייתכנו סיבות שונות לכך שהתמותה בעיר נמוכה יותר. למשל, ייתכן כי הסיבה לתמותה נמוכה היא העובדה כי בעיר אוניברסיטאית הגיל הממוצע של התושבים נמוך יותר מאשר בעיר אחרת (יש יותר צעירים שלומדים באוניברסיטה), ואינה קשורה לאורח החיים של התושבים.
5. מתוך 1,000 אנשים שמשתמשים בסוכרזית 700 הם אנשים שמנים. אפשר לומר כי יש קשר הדוק בין שימוש בסוכרזית לאנשים שמנים, אך לא ניתן להסיק שהסוכרזית גורם להשמנה. קרוב לוודאי כי הקשר הסיבתי הוא הפוך: יותר אנשים שמנים משתמשים בסוכרזית, והכתב החליף בין הסיבה לבין התוצאה.
6. מהנתונים לא ניתן להסיק את המסקנה כי אכילת חטיפי בריאות היא הסיבה להישגים ספורטיביים טובים יותר. ייתכנו גורמים שונים לכך שבית-הספר זכה בתחרויות ספורט – למשל, המורים לספורט הם מורים מצויינים, בבית-הספר יש תכנית מיוחדת לפעילות גופנית או בבית-הספר מקדישים שעות רבות לאימוני ספורט.

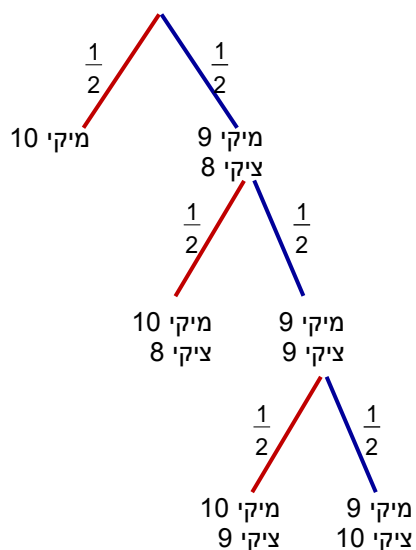


1. א. ההסתברות לנחש נכון במשחק בודד היא  $\frac{1}{3}$ .
- לכן ההסתברות לנחש נכון את כל 14 התוצאות היא  $(\frac{1}{3})^{14}$ .
- ב. לנחש נכון 13 משחקים משמעותו לנחש 13 תוצאות נכונות ותוצאה אחת לא נכון.
- ההסתברות לניחוש לא נכון במשחק הראשון וכל הניחושים האחרים נכונים היא  $(\frac{1}{3})^{13} \cdot \frac{2}{3}$ .
  - ההסתברות לניחוש לא נכון במשחק השני וכל הניחושים האחרים נכונים היא  $(\frac{1}{3})^{13} \cdot \frac{2}{3}$ .
  - אותה ההסתברות מתקיימת לניחוש לא נכון במשחק השלישי – וכך הלאה עד ניחוש לא נכון במשחק האחרון (וכל הניחושים האחרים נכונים).
- לכן ההסתברות לנחש נכון 13 משחקים היא  $\frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{3})^{13} \cdot 14$ .
- ג. ההסתברות לניחוש נכון **לפחות** 13 משחקים היא סכום ההסתברויות לניחוש נכון של 13 וההסתברות לניחוש נכון של 14 משחקים. כלומר  $(\frac{1}{3})^{14} + (\frac{1}{3})^{13} \cdot \frac{2}{3} \cdot 14$ .
- ד. ההסתברות לניחוש נכון **לכל היותר** 13 משחקים היא סכום ההסתברויות לנחש נכון 13 משחקים + לנחש נכון 12 משחקים + ... + לנחש נכון 0 משחקים. התוצאה היחידה שאינה מתאימה למאורע זה היא ניחוש נכון של כל 14 המשחקים. לכן ההסתברות היא  $1 - (\frac{1}{3})^{14}$ .

2. אפשר לפתור שאלה זו באמצעות שיקולים או באמצעות מודל העץ.

א. - באמצעות שיקולים: למיקי 9 נקודות ולציקי 7 נקודות. כדי שציקי יגיע ל-10 נקודות עליו לנצח 3 פעמים ברציפות. לכן עליהם לשחק לכל היותר עוד 3 משחקים. בכל מקרה אחר מיקי מגיע ל-10 נקודות לפני ציקי.

- באמצעות מודל העץ:



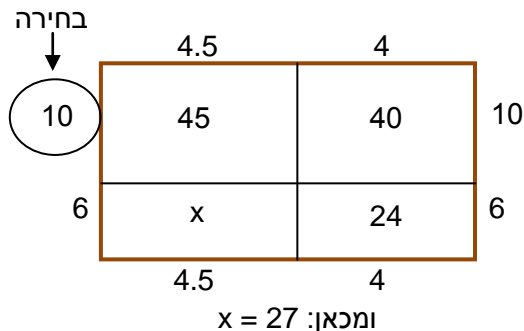
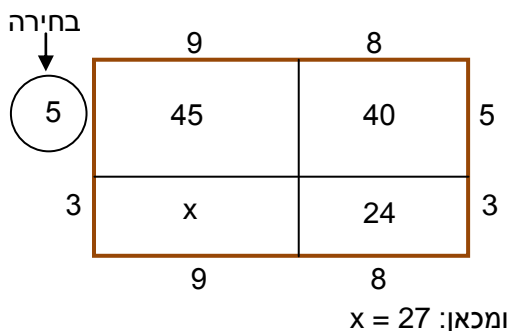
המסלולים האדומים מתארים ניצחון של מיקי, המשלול הכחול מתאר ניצחון של ציקי.

ב. ההסתברות שציקי ינצח היא  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

	a	b
c	45	40
d	x	24

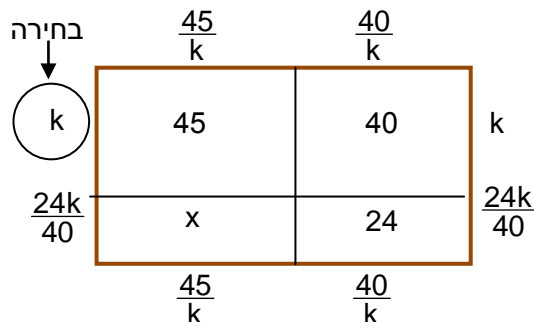
3. רוב התלמידים פותרים את השאלה באמצעות שיקולים של כפולות וגורמים.

הם בוחרים ערך מספרי נוח לאורך אחד הקטעים, מוצאים את הערכים המתאימים לאורכי הקטעים האחרים ולאחר מכן מחשבים את גודל השטח x. למשל:



השוואת התוצאות מובילה למסקנה כי  $x = 27$  לכל בחירה של אורך קטע.

ניתן להכליל זאת כך:



$$x = \frac{24k}{40} \cdot \frac{45}{k} = 27 \quad \text{ומכאן מסיקים, כי לכל } k:$$

	a	b
c	45	40
d	x	24

• אפשר לפתור את השאלה גם באמצעות חישוב יחסי שטחים.

$$\frac{40}{24} = \frac{c}{d} \quad (\text{לשני המלבנים יש צלע משותפת שאורכה } b).$$

$$\frac{45}{x} = \frac{c}{d} \quad (\text{לשני המלבנים יש צלע משותפת שאורכה } a).$$

↓

$$x = 27 \quad \text{מכאן, } \frac{45}{x} = \frac{40}{24}$$

	a	b
c	45	40
d	x	24

• פתרון נוסף באמצעות מערכת משוואות.

נסמן את אורכי הצלעות (בס"מ) של המלבנים החלקיים בעזרת משתנים  $a, b, c, d$  ( $d > 0, c > 0, b > 0, a > 0$ ). ראו ציור. מערכת משוואות מתאימה לנתונים:

$$ad = x, \quad bd = 24, \quad bc = 40, \quad ac = 45$$

$$c = \frac{45}{a} \quad \Leftarrow \quad ac = 45 \quad \text{נפתור את מערכת המשוואות:}$$

$$c = \frac{40}{b} \quad \Leftarrow \quad bc = 40$$

$$\text{נקבל: } b = \frac{40a}{45} \quad \Leftarrow \quad \frac{45}{a} = \frac{40}{b}$$

$$ad = \frac{24 \cdot 45}{40} \quad \Leftarrow \quad \frac{40a}{45} \cdot d = 24 \quad \text{ונקבל: } bd = 24 \quad \text{במשוואה}$$

$$\text{כלומר, } ad = x = 27$$

4. נסמן את ההסתברות לבחור אדם שמרכיב משקפיים ב- $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ).

ההסתברות לבחור אדם שאינו מרכיב משקפיים היא  $(1 - p)$ .

ההסתברות לבחור שני אנשים שמרכיבים משקפיים או ששניהם לא מרכיבים משקפיים היא 0.68.

$$p^2 + (1 - p)^2 = 0.68 \quad \text{משוואה מתאימה:}$$

$$p^2 - p + 0.16 = 0 \quad \text{נפתור את המשוואה:}$$

$$p = 0.8 \quad \text{או} \quad p = 0.2$$

שני הפתרונות מתאימים לתנאי הבעיה. לכן, לשאלה יש שתי תשובות אפשריות:

ההסתברות לבחור באקראי תושב מרכיב משקפיים היא 0.2 או 0.8.



החידה אינה קלה.

לאחר האמירות של שני האנשים שמאחוריו, האיש הראשון יכול להסיק כי צבע הכובע שלראשו הוא לבן.

השיקולים שלו: נניח שצבע הכובע שלי שחור, אז השני רואה אצלי כובע שחור וחושב שאם גם אצלו הכובע שחור,

אז השלישי רואה שני כובעים שחורים ומזהה הוא יכול להסיק שיש לו כובע לבן. אך השלישי אומר שהוא אינו יכול לדעת

את צבע הכובע שלראשו, כלומר השני חושב שאין לו כובע שחור אלא לבן. אך גם השני אומר שאינו יכול לדעת את

צבע הכובע שלראשו, ומזהה אני מסיק שעל ראשי לא כובע שחור אלא כובע לבן.



- מתייחסים לקשיים שמעלים התלמידים אודות הפעילויות בשיעור.
- דנים בתשובות שבהן לא ניתן להסיק את המסקנות ומדוע.
- מדגישים כי קיימת נטייה לפרש נתונים לפי אמונות קיימות במקום לבחון את האמונות לאור הנתונים, ובכך מגיעים למסקנות שגויות.
- מציינים כי אנו החיים בחברה המודרנית, צרכני מידע. המידע מתייחס לעובדות, להיסקים ולהמלצות. גם כאשר העובדות מהימנות לחלוטין, יש אי-ודאות לגבי ההיסקים וההמלצות הנובעים מהם.