2.2 הסתברות ופונקציות

מטרות

- התנסות ושימוש בשיקולים הסתברותיים.
- קישור בין גיאומטריה, אלגברה והסתברות.
- בניית מרחב המדגם של כל התוצאות האפשריות ושימוש בו לחישוב הסתברויות.
- העמקה בנושא פונקציה קווית ופונקציה ריבועית וקשר בין הייצוגים האלגבריים לייצוגים הגרפיים שלהן.

אמצעי עזר

אין.

פתיחה

מציגים את הסיפור שבפתיחה. מדגימים את הסיטואציה של הגדרת פונקציה קווית על-ידי שתי הטלות קובייה.

מבקשים מהתלמידים להציע ייצוגים אלגבריים של פונקציות קוויות שיכולות להתקבל משתי הטלות של קוביית המשחק. אפשר גם להציע ייצוג אלגברי של פונקציה קווית, למשל $y = 3x - 6$ ולשאול אם ניתן לקבל פונקציה זו ולבקש נימוקים לתשובה.

מטילים פעמיים קוביית משחק רגילה ואת תוצאות ההטלה המתקבלות רושמים במקום הפרמטרים שבייצוג האלגברי של הפונקציה ($y = ax + b$).

כל הפונקציות הקוויות שמתקבלות בצורה כזו מקיימות את התנאים הבאים:

- השיפוע a הוא מספר טבעי בין 1 ל- 6 (מספר חיובי), כלומר הפונקציה עולה,
- נקודת החיתוך עם ציר y של הישר היא מהצורה $(0 , b)$, b הוא מספר טבעי בין 1 ל- 6, כלומר הישר חותך את ציר y בחלקו החיובי.
- נקודת החיתוך עם ציר x היא מהצורה $(-\frac{b}{a} , 0)$, כלומר הישר חותך את ציר x בחלקו השלילי.

מסיקים שמבין הישרים המשורטטים במשימת הפתיחה יכולים להתקבל הישרים שבסעיפים ג, ו.

אפשר גם לבקש מהתלמידים לנמק מדוע הישרים האחרים לא יכולים להתקבל.

שואלים: כמה ישרים יכולים להתקבל מהטלה פעמיים של קובייה?

תשובה: 36 ישרים.

אפשר להגיע לתשובה בשתי דרכים:

- בעזרת שיקולים – עבור כל מספר שיתקבל בהטלה הראשונה (המספר שמציבים במקום a), נקבל 6 תוצאות שונות בהטלה השנייה (המספר שמציבים במקום b). סך-הכול 36 זוגות מספרים, כלומר 36 ישרים שונים.

• בעזרת רישום התוצאות בטבלה – רישום התוצאות כזוגות סדורים (a , b). התלמידים יכולים להשלים בעצמם את הטבלה.

הטלה שנייה

הטלה ראשונה

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	(1 , 1)	(1 , 2)	(1 , 3)	(1 , 4)	(1 , 5)	(1 , 6)
2	(2 , 1)	(2 , 2)	(2 , 3)	(2 , 4)	(2 , 5)	(2 , 6)
3	(3 , 1)	(3 , 2)	(3 , 3)	(3 , 4)	(3 , 5)	(3 , 6)
4	(4 , 1)	(4 , 2)	(4 , 3)	(4 , 4)	(4 , 5)	(4 , 6)
5	(5 , 1)	(5 , 2)	(5 , 3)	(5 , 4)	(5 , 5)	(5 , 6)
6	(6 , 1)	(6 , 2)	(6 , 3)	(6 , 4)	(6 , 5)	(6 , 1)

מצאנו כי מבין הישרים המשורטטים יש 2 ישרים שיכולים להתקבל, לכן ההסתברות לקבל ישרים אלו היא $\frac{2}{36}$.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת ביישום התכונות של פונקציה קווית ושל פונקציה ריבועית בהקשר של הסתברות.

במשימת הפתיחה ובמשימות 1 – 3 עוסקים בפונקציה קווית. ובהמשך, במשימות 4 ו- 5, עוסקים בפונקציה ריבועית.

פונקציה קווית

1. עוסקים בפונקציות קוויות מהצורה y = ax + 1, כאשר במקום a רושמים את התוצאות שמתקבלות מהטלת הקובייה פעם אחת.

מבקשים מהתלמידים לרשום את כל הפונקציות שמתקבלות ולשרטט אותן. התלמידים יכולים להיעזר בשרטוט סקיצה של הישרים, ולהיעזר בשיקולים ובחישובים כדי לענות על הסעיפים שבשאלה.

הפונקציות שמתקבלות הן:

$y = 6x + 1$, $y = 5x + 1$, $y = 4x + 1$, $y = 3x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = x + 1$

הגרפים של כל הפונקציות האלה עוברים דרך הנקודה (0 , 1).

א. עבור a = 1 מתקבל משולש שווה-שוקיים.

שיעורי נקודות החיתוך של הישר עם הצירים הן: (0 , 1) , (–1 , 0).

ב. עבור a = 6 מתקבל משולש בעל השטח הקטן ביותר.

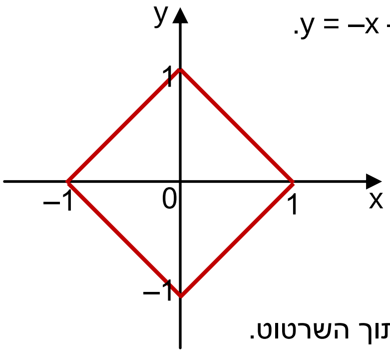
אורכי הניצבים של המשולש הם 1 ו- $\frac{1}{6}$ יחידות אורך, ושטחו $\frac{1}{12}$ יחידות שטח.

ג. ההסתברות היא 0. השטח הגדול ביותר הוא $\frac{1}{2}$ והוא שטחו של המשולש שווה-השוקיים.

ד. ההסתברות היא $\frac{1}{2}$. עבור שלושה ישרים מבין השישה מתקבל משולש ישר-זווית ששטחו קטן מ- $\frac{1}{6}$.

2. עוסקים בפונקציה קווית מהצורה $y = ax + b$. מטילים פעמיים דיסקית שעל צד אחד רשום המספר **1** ועל הצד השני רשום המספר **(–1)**. במקום a רושמים את התוצאה שמתקבלת בהטלה הראשונה, ובמקום b את התוצאה שמתקבלת בהטלה השנייה.

א. יכולים להתקבל 4 ישרים: $y = x + 1$, $y = x – 1$, $y = –x + 1$, $y = –x – 1$.



ב. ארבעת הישרים יוצרים ריבוע ששטחו 2 יחידות שטח.
אפשר לבקש מן התלמידים להסביר מדוע מתקבל ריבוע.

ג. עבור שני ישרים מבין הארבעה מתקבל ישר ששיפועו חיובי,
כלומר פונקציה עולה, ולכן ההסתברות לקבלת פונקציה עולה היא $\frac{1}{2}$.
אפשר להגיע למסקנה זו הן מתוך הייצוגים האלגבריים של הישרים והן מתוך השרטוט.

3. בונים שתי פונקציות קוויות כמו בשאלה 2.

א. התלמידים יכולים לעבוד בזוגות ולהשלים את הטבלה. הפעילות בזוגות מסייעת לבדיקה הדדית, להעמקת ההבנה ולמניעת טעויות אפשריות.

פונקציה שנייה (עמודות); פונקציה אחת (שורות)

	(1 , 1)	**(–1 , 1)**	**(1 , –1)**	**(–1 , –1)**
(–1 , –1)	נחתכים	מקבילים	נחתכים	מתלכדים
(1 , –1)	מקבילים	נחתכים	מתלכדים	נחתכים
(–1 , 1)	נחתכים	מתלכדים	נחתכים	מקבילים
(1 , 1)	מתלכדים	נחתכים	מקבילים	נחתכים

ב. ההסתברות ששני הישרים מקבילים: $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$, ששני הישרים מתלכדים: $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$,
ששני הישרים נחתכים: $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$.

פונקציה ריבועית

4. עוסקים בפונקציות ריבועיות מהצורה $y = x^2 + bx + c$.
בדומה למשימת הפתיחה, מטילים פעמיים את הקובייה, במקום b רושמים את התוצאה שמתקבלת בהטלה הראשונה, ובמקום c את התוצאה שמתקבלת בהטלה השנייה.
כלומר, מתקבלות 36 פונקציות ריבועיות שבהן ערכי b ו- c הם מספרים טבעיים בין 1 ל- 6.

התכונות המשותפות לכל הפונקציות האלה הן:

- הקדקוד הוא נקודת מינימום,
- ציר הסימטריה הוא ישר מהצורה $x = -\frac{b}{2}$,
- נקודת החיתוך עם ציר y היא מהצורה (0 , c), c הוא מספר טבעי בין 1 ל- 6. לכן הפרבולה חותכת את ציר y בחלקו החיובי.

א. הגרף שיכול להתקבל הוא הפרבולה (iii).

ב. הייצוג האלגברי של פונקציה זו הוא: $y = x^2 + 4x + 3$.

אפשר למצוא את הייצוג האלגברי בשלוש דרכים:

- מסיקים על-סמך שיעורי הקדקוד (1– , 2–) כי הפונקציה היא $y = (x + 2)^2 – 1$.
- מסיקים על-סמך שיעורי נקודות האפס של הפונקציה (0 , 1–) ו- (0 , 3–) כי הפונקציה היא $y = (x + 1)(x + 3)$.
- מסיקים על-סמך ציר הסימטריה $x = –2$, כי $-\frac{b}{2} = -2 \Leftarrow b = 4$,
ושיעורי נקודת החיתוך עם ציר y ‏(3 , 0), כלומר $c = 3$.

ג. ההסתברות לקבל גרף זה היא $\frac{1}{36}$.

5. עוסקים בפונקציות ריבועיות מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ – כאשר ערכי a , b ו- c ‏ 2 , 1 , 0 , 1– , 2–.

מטילים שלוש פעמים קוביית משחק הוגנת אלא שעל פאות הקובייה רשומים המספרים 2 , 1 , 0 , 0 , 1– , 2–.
במקום a רושמים את התוצאה שמתקבלת בהטלה הראשונה, במקום b את התוצאה שמתקבלת בהטלה השנייה, ובמקום c את התוצאה שמתקבלת בהטלה השלישית.

אפשר לרשום את הפונקציות בצורה שיטתית, אך הדבר מייגע מאוד. אפשר להפעיל שיקולים ולהיעזר במסקנות מהשאלות הקודמות לגבי מספר הפונקציות השונות שמתקבל.

כשאחד הפרמטרים (נניח הפרמטר a) קבוע מתקבלות 36 פונקציות ריבועיות (בדומה לשאלה 4).

עבור $a = 0$ מתקבלות 72 פונקציות קוויות (המספר 0 מופיע על שתי פאות בקובייה).

עבור כל אחד מהערכים האחרים של a מתקבלות 36 פונקציות ריבועיות.

בסך-הכול מתקבלות 216 פונקציות.

א. ההסתברות שתתקבל פונקציה ריבועית: $\frac{2}{3} = \frac{144}{216}$.

ב. ההסתברות שהפונקציה תהיה קווית: $\frac{1}{3} = \frac{72}{216}$.

ג. ההסתברות שגרף הפונקציה יעבור דרך ראשית הצירים (עבור $c = 0$): $\frac{1}{3} = \frac{72}{216}$.

ד. ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה פרבולה בעלת מקסימום (עבור $a = –2$ או $a = –1$): $\frac{1}{3} = \frac{72}{216}$.

ה. ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה ישר מקביל לציר x או ציר x עצמו (עבור $a = b = 0$): $\frac{1}{9} = \frac{24}{216}$

1. אפשר לפתור באמצעות מודל השטח או באמצעות מודל העץ.

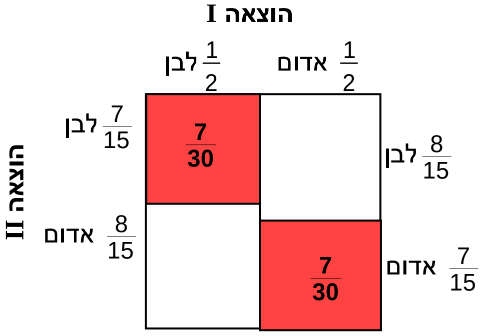
א. במגירה של יעל 8 גרביים בצבע לבן ו- 8 גרביים בצבע אדום, בסך-הכול 16 גרביים.

הוצאת הגרביים היא ללא החזרה, לכן

- במודל השטח החלוקה בשלב השני מתבצעת על כל מלבן בנפרד מכיוון שחלוקה זו תלויה בתוצאה שבשלב הראשון.

ההסתברות להוציא זוג גרביים מאותו צבע מיוצגת

בעזרת השטחים הצבועים והיא $\frac{7}{15}=\frac{7}{30}+\frac{7}{30}$.

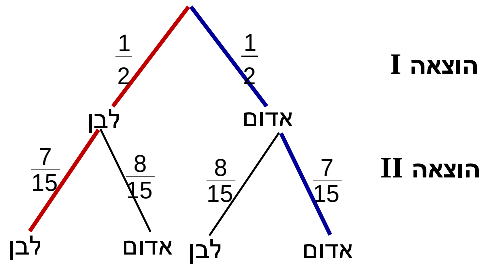


- במודל העץ: ההסתברויות על הענפים משתנות בשלב השני בהתאם לתוצאת השלב הראשון.

ההסתברות להוציא זוג גרביים מאותו צבע מיוצגת

על-ידי חיבור שני המסלולים הצבועים והיא

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{15}=\frac{7}{15}$$



.2 במגירה של מירה 8 גרביים בצבע לבן , 8 גרביים בצבע אדום ו- 4 גרביים בצבע שחור.

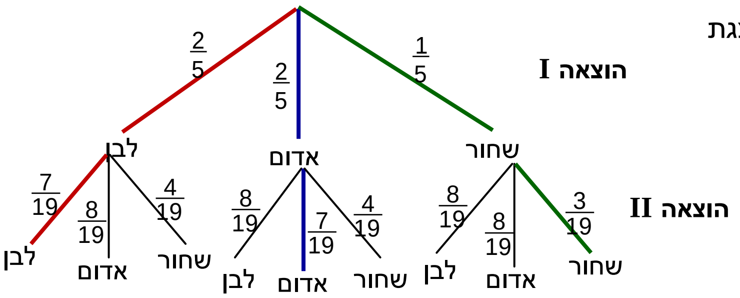
בסך-הכול 20 גרביים.

אפשר לפתור את השאלה באמצעות מודל העץ שבו בכל שלב יש 3 התפצלויות.

ההסתברות להוציא זוג גרביים מאותו צבע מיוצגת

על-ידי חיבור שלושת המסלולים הצבועים והיא:

$$\underbrace{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{19}}_{\text{לבן}}+\underbrace{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{19}}_{\text{אדום}}+\underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{19}}_{\text{שחור}}=\frac{31}{95}$$



.3 א. נמצא את מספר הגולות מכל צבע שיש בקופסה באמצעות פתרון מערכת משוואות.

נסמן ב- x את מספר הגולות האדומות שבקופסה, x מספר טבעי.

נסמן ב- y את מספר הגולות הכחולות שבקופסה, y מספר טבעי.

מערכת משוואות מתאימה:

$$\begin{cases} x-1+y=7(x-1) \\ x+y-2=5x \end{cases}$$

מפתרון מערכת המשוואות מתקבל: $x = 4$, $y = 18$, כלומר בקופסה 4 גולות אדומות ו- 18 גולות כחולות.

בסך-הכול יש בקופסה 22 גולות.

נדגיש כי חשוב לבדוק אם הפתרון מתאים לבעיה.

ב. ההסתברות להוציא גולה אדומה ולאחריה גולה כחולה היא: $\frac{4}{22}\cdot\frac{18}{21}=\frac{12}{77}$

אפשר לפתור את החידה באמצעות מודל השטח או באמצעות מודל העץ.

כל אחד מהמודלים נותן ייצוג וויזואלי לדרך הפתרון, ובכך נותן משמעות הן לחישוב והן לתוצאות.

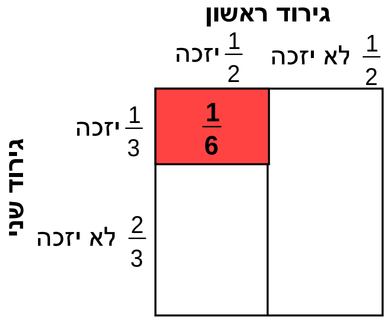
- במודל השטח: על צלעות הריבועים מופיעים ה"גירודים" וההסתברויות. בדומה לניסוי של הוצאת כדורים ללא החזרה ההסתברות, בגירוד השני תלויה בתוצאה של ההסתברות שהתקבלה בגירוד הראשון.

<u>במסעדת "מזלבורגר"</u>

- בשלב הראשון ההסתברות לגרד משבצת שבה אחת מהתמונות הזהות היא 2 מתוך 4, כלומר $\frac{1}{2}$.

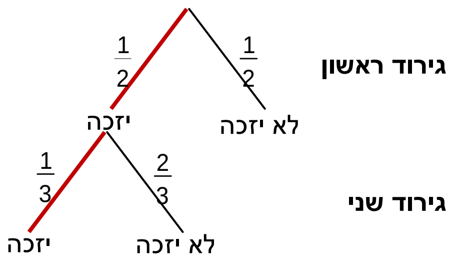
בשלב השני יש לגרד רק אם גורדה משבצת "זוכה" בגירוד הראשון, ואז ההסתברות שתופיע התמונה הזהה השנייה היא 1 מתוך 3, כלומר $\frac{1}{3}$.

ההסתברות לזכות במאכל חינם מיוצגת בעזרת השטח הצבוע והיא $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.



- במודל העץ: רושמים על הענפים את ההסתברויות, ומדגישים את המסלול המתאים.

ההסתברות לזכות במאכל חינם מיוצגת על המסלול הצבוע והיא $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.



<u>במסעדת "קנוכאן"</u>

בשלב הראשון ההסתברות לגרד משבצת שבה אחת מהתמונות הזהות היא 3 מתוך 6, כלומר $\frac{1}{2}$.

בשלב השני, מכיוון שלא יודעים מהי התמונה הזהה מגרדים בכל מקרה פעמיים, ואז ההסתברות שתופיע תמונה זהה נוספת היא 2 מתוך 5, כלומר $\frac{2}{5}$.

ההסתברות לזכות במאכל חינם במסעדת "קנוכאן" היא $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

מסקנה: ההסתברות לזכות במאכל חינם במסעדת "קנוכאן" גדולה יותר.

למסיימים

1. בונים פונקציה ריבועית מהצורה: $y = ax^2 + bx + c$ בעזרת קוביית משחק הוגנת אשר על שש פאותיה רשומים המספרים: 1 , 1 , 0 , 0 , -1 , -1.

מטילים את הקובייה שלוש פעמים: מציבים את תוצאת ההטלה הראשונה במקום a, את תוצאת ההטלה השנייה במקום b, את תוצאת ההטלה השלישית במקום c.

א. כמה פונקציות אפשר לקבל?

תשובה: 216 פונקציות.

עבור $a = 0$ מתקבלות 72 פונקציות קוויות.

עבור $a = 1$ מתקבלות 72 פונקציות ריבועיות בעלות קדקוד מינימום.

עבור $a = -1$ מתקבלות 72 פונקציות ריבועיות בעלות קדקוד מקסימום.

ב. מה ההסתברות לקבל פונקציה קווית?

תשובה: $\frac{1}{3} = \frac{72}{216}$.

ג. אם ידוע שהתקבלה פונקציה ריבועית, מה ההסתברות שהיא בעלת קדקוד מינימום?

תשובה: מתקבלות 144 פונקציות ריבועיות, שמהן 72 הן בעלות קדקוד מינימום.

לכן ההסתברות היא $\frac{1}{2} = \frac{72}{144}$.

ד. אם ידוע שהתקבלה פונקציה ריבועית, מה ההסתברות שהנקודה $(0 , 0)$ נמצאת על גרף הפונקציה?

תשובה: הגרף עובר דרך הראשית כלומר $c = 0$.

יש 24 פונקציות ריבועיות כאלה מתוך 144 פונקציות ריבועיות.

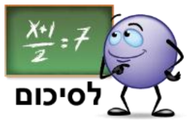
לכן ההסתברות היא $\frac{1}{6} = \frac{24}{144}$.

ה. אם ידוע שהתקבלה פונקציה ריבועית, מה ההסתברות שציר הסימטריה שלה הוא $x = \frac{1}{2}$?

תשובה: כל הפונקציות שבהן $a = 1$ ו- $b = -1$ או $a = -1$ ו- $b = 1$.

יש 48 פונקציות ריבועיות כאלה מתוך 144 פונקציות ריבועיות.

לכן ההסתברות היא $\frac{1}{3} = \frac{48}{144}$.



- מתייחסים לקשיים שמעלים התלמידים אודות הפעילויות בשיעור.
- דנים בדרכים השונות למציאת מספר הפונקציות הקוויות ומספר הפונקציות הריבועיות – מרחב המדגם.
- חוזרים על התכונות של הפונקציות (הקוויות והריבועיות) ובהסקת מסקנות לגבי ההסתברויות השונות.
- מתייחסים לפתרונות של התלמידים לשאלות 2 ו- 3.
- מתייחסים לשאלות 4 ו- 5, דנים בהבדלים בין הפונקציות שמתקבלות בשאלה 4 לבין אלו שמתקבלות בשאלה 5 ובסיבות לכך.