יחידה 2: הסתברות

2.1 זהירות 7 בדרך (משחק לשניים עד ארבעה שחקנים)

מטרות

- הצגת ההסתברות ככלי לניתוח משחקים.
- התנסות ושימוש בשיקולים הסתברותיים.
- הכרת המושג "תוחלת" (ללא הגדרה פורמלית).
- בניית מרחב המדגם של כל התוצאות האפשריות.

פתיחה

משחק ראשון: אחת או שתי קוביות

מספרים מה הולכים לעשות בשיעור.

קוראים את הוראות המשחק. משחקים משחק לדוגמה עם התלמידים (מורה מול כיתה).

פתרונות והערות

1. ב. שומעים את השערות התלמידים כולל נימוקים להשערות.

ג. - אם מטילים קובייה אחת, ממוצע הנקודות להטלה הוא: $\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=3.5$

- אם מטילים שתי קוביות, טבלת הניקוד האפשרית היא:

קובייה א

קובייה ב

ניקוד	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	8
3	4	5	6	0	8	9
4	5	6	0	8	9	10
5	6	0	8	9	10	11
6	0	8	9	10	11	12

כדי למצוא את ממוצע הנקודות להטלה אחת, מחשבים את סכום הנקודות בלוח ומחלקים במספר התוצאות.

ממוצע הנקודות להטלה אחת: $\frac{210}{36}=5.83$

2. מאחר שממוצע הנקודות בהטלת שתי קוביות גבוה מממוצע הנקודות בהטלת קובייה אחת, כדאי לבחור בהטלת שתי קוביות.

משחק שני: אחת שתיים או שלוש קוביות

קוראים ומסבירים את הוראות המשחק. אם צריך, משחקים משחק לדוגמה עם התלמידים (מורה מול כיתה).

3. ג. משלימים את כל התוצאות האפשריות בהטלת שלוש קוביות.

תוצאות הניקוד האפשרי בהטלת שלוש קוביות מובאות בטבלה שבסוף המדריך.

מומלץ שהתלמידים יחלקו ביניהם את המשימה של מילוי הטבלאות ולבדיקה ישוו ביניהם את התוצאות.

כדי למצוא את ממוצע הנקודות להטלה אחת, מחשבים את סכום הנקודות בכל הלוחות, ומחלקים במספר התוצאות.

ממוצע הנקודות להטלה אחת: $6.125=\frac{1323}{216}$.

4. ממוצע הנקודות להטלה אחת של שלוש קוביות גבוה מהממוצעים שהתקבלו בהטלת קובייה אחת (3.5) או בהטלת שתי קוביות (5.83), ולכן במשחק זה כדאי לבחור בהטלת שלוש קוביות.

1. א. תחום ההצבה: $x \neq 1$, $x \neq -2$.

לאחר פישוט: $$\frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{x-1}=\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+2}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x+2}$$

ב. תחום ההצבה: $x \neq 2$, $x \neq -2$, $x \neq 1$.

לאחר פישוט: $$\frac{\frac{x^2-1}{x^2-4}}{\frac{x-1}{x+2}}=\frac{x^2-1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x+2}{x-1}=\frac{x+1}{x-2}$$

ג. תחום ההצבה: $x \neq -2$, $x \neq 1$.

לאחר פישוט: $$\frac{x^2-1}{\frac{x-1}{x+2}}=\frac{x^2-1}{1}\cdot\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{1}\cdot\frac{x+2}{x-1}=(x+1)(x+2)$$

ד. תחום ההצבה: $x \neq 2$, $x \neq -2$, $x \neq 1$.

לאחר פישוט: $$\frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{\frac{x-1}{x^2-4}}=\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+2}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x-1}=(x+1)(x-2)$$

ה. תחום ההצבה: $x \neq 1$, $x \neq -1$.

לאחר פישוט:
$$\frac{\frac{x^4-1}{x+1}}{x-1}=\frac{x^4-1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}=x^2+1$$

ו. תחום ההצבה: $x \neq 1$, $x \neq -1$.

לאחר פישוט:
$$\frac{\frac{x^4-1}{x^2+1}}{\frac{x^2-1}{x+1}}=\frac{x^4-1}{x^2+1}\cdot\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}\cdot\frac{x+1}{x^2-1}=x+1$$

אורכו של החלק הקצר הוא בין 0 לחצי מאורכו המקורי של המקל (אחרת הוא לא היה החלק הקצר).
הסיכוי לכל אורך שווה, לכן האורך הממוצע יהיה הממוצע בין האורך המינימלי לאורך המקסימלי, כלומר רבע מאורכו המקורי של המקל.

למסיימים

נתחו את המשחק הראשון (הטלת קובייה אחת או שתי קוביות) במקרה של משחק "זהירות 6 בדרך". כלומר, בהטלת שתי קוביות, אם סכום הנקודות הוא 6, השחקן אינו מקבל נקודות באותו תור.
השוו בין התוצאות שקיבלתם ובין התוצאות של המשחק "זהירות 7 בדרך".

תשובה: טבלת הניקוד האפשרית היא:

קובייה א (עמודות), קובייה ב (שורות)

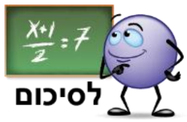
ניקוד	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	0	7
2	3	4	5	0	7	8
3	4	5	0	7	8	9
4	5	0	7	8	9	10
5	0	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ממוצע הנקודות להטלה אחת הוא:

$$\frac{222}{36}=6.17$$

ממוצע זה גבוה מהממוצע שהתקבל בהטלת שתי קוביות במשחק "זהירות 7 בדרך".

הערה למורים בלבד: המושג הסטטיסטי המסתתר בקבלת ההחלטות במשחקים הוא "**התוחלת**".
התוחלת היא ממוצע משוקלל של התוצאות האפשריות – כאשר כל תוצאה משוקללת בהסתברות שלה. כלומר, התוחלת היא סכום המכפלות של כל אחת מן התוצאות בהסתברות המתאימה לקבלתה.
אם ההסתברויות לקבלת כל תוצאה שווֹת, אז התוחלת היא הממוצע החשבוני של התוצאות האפשריות באותו ניסוי.



לסיכום

- דנים עם התלמידים בשאלה:

מה קורה לממוצע הנקודות בהטלה של קובייה אחת, של שתי קוביות או של שלוש קוביות במשחק "זהירות 7 בדרך" (כלומר, במקרה בו סכום נקודות 7, על שתי קוביות, מבטל את הניקוד באותה הטלה)?

שיקולים:

- ראינו כי ממוצע הנקודות בהטלת שלוש קוביות גדול יותר בהשוואה לממוצע הנקודות בהטלת שתי קוביות.
- כשמספר הקוביות גדל משתי קוביות לשלוש קוביות, מספר המקרים שבהם מתקבל סכום נקודות 7 על הקוביות (והפסד כל הנקודות) גדֵל.

ייתכן שתעלה השאלה: מה קורה אם אין הגבלה על מספר הקוביות שמותר להטיל?

הרושם הוא שהממוצע ילך ויגדל. אם בודקים רואים כי החל מהטלת 4 קוביות הניקוד הממוצע להטלה מתחיל לרדת.

בהטלת 4 קוביות – ממוצע הנקודות להטלה הוא $4.99 = \frac{6468}{1296}$.

בהטלת 5 קוביות – ממוצע הנקודות להטלה הוא $3.52 = \frac{27405}{7775}$.

דף ריכוז נקודות לכל התוצאות האפשריות בהטלת 3 קוביות

הערה: תא ריק משמעותו 0 נקודות.

קובייה ג' 1

קובייה ב' \ קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1	3	4	5	6	7	
2	4	5	6	7		
3	5	6	7		9	
4	6	7		9	10	
5	7		9	10	11	
6						

קובייה ג' 2

קובייה ב' \ קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1	4	5	6	7		
2	5	6	7	8		10
3	6	7	8			11
4	7	8		10		12
5						
6		10	11	12		14

קובייה ג' 3

קובייה ב' \ קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1	5	6	7		9	
2	6	7	8			11
3	7	8	9		11	12
4						
5	9		11		13	14
6		11	12		14	15

קובייה ג' 4

קובייה ב' \ קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1	6	7		9	10	
2	7	8		10		12
3						
4	9	10		12	13	14
5	10			13	14	15
6		12		14	15	16

קובייה ג' 5

קובייה ב' \ קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1	7		9	10	11	
2						
3	9		11		13	14
4	10			13	14	15
5	11		13	14	15	16
6			14	15	16	17

קובייה ג' 6

קובייה ב' \ קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1						
2		10	11	12		14
3		11	12		14	15
4		12		14	15	16
5			14	15	16	17
6		14	15	16	17	18