

1.2 סכומים



נתונים שלושה סכומים.

סכום עשרת המספרים הטבעיים הראשונים:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

סכום ריבועי עשרת המספרים הטבעיים הראשונים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

סכום החזקות השלישיות של עשרת המספרים הטבעיים הראשונים:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$$

נסו לאמוד את התוצאה של כל אחד מהסכומים.

בפעילות נשתמש בריבועי יחידה או בקוביות יחידה כדי לחקור את הסכומים ולמצוא דרך מקוצרת לחשב סכומים כאלה עם מספר מחוברים שונה.

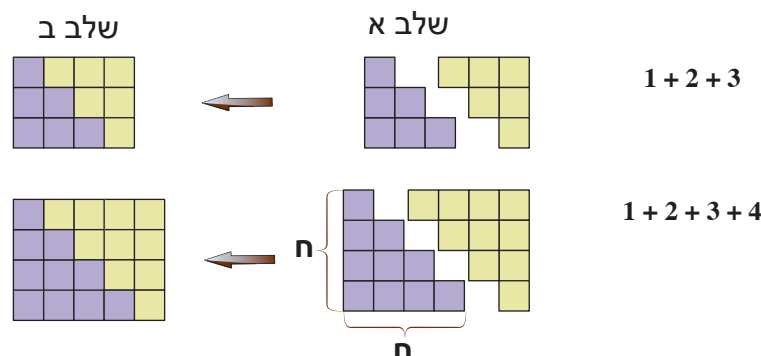


במשפחת ברנולי השווייצרית היו מתמטיקאים רבים. ביניהם היה יאקוב ברנולי (Jakob Bernoulli 1705-1654). אביו של יאקוב שהיה אזרח חשוב בבזל, רצה שבנו ילמד תאולוגיה, אבל בנו התעניין במתמטיקה ובאסטרונומיה מגיל צעיר. בשנת 1682 הקים ברנולי בית-ספר לפיזיקה ניסויית, ובשנת 1687 התמנה לפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת בזל. הוא החזיק במשרתו עד יום מותו. הוא ציווה לשרטט על מצבתו עקומה מתמטית חשובה. תרומותיו של ברנולי לענפי המתמטיקה והפיזיקה הן רבות.

בין השאר מצא ברנולי נוסחה כללית לחישוב סכום של חזקות כלשהן של מספרים טבעיים עוקבים החל מ-1.

סכום הטבעיים

1. הצוירים שלפניכם מדגימים דרך לחישוב של סכום n מספרים טבעיים עוקבים החל מ-1.

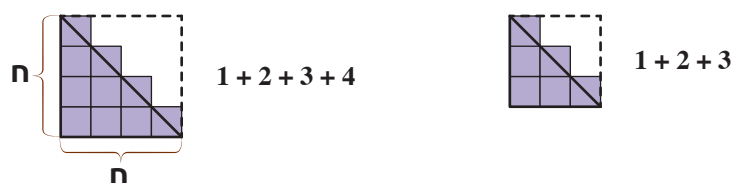


א. שרטטו במחברת ציור המדגים באותה דרך את הסכום של חמשת המספרים הטבעיים הראשונים.

ב. חשבו את הסכום של 100 המספרים הטבעיים הראשונים.

ג. כתבו ביטוי אלגברי לחישוב הסכום של n המספרים הטבעיים הראשונים, בהתאם לדרך המודגמת.

2. הצוירים הבאים מדגימים דרך נוספת לחישוב של סכום מספרים טבעיים עוקבים החל מ-1.



א. חשבו בדרך זו את הסכום של חמשת המספרים הטבעיים הראשונים.

ב. כתבו ביטוי אלגברי לחישוב הסכום של n המספרים הטבעיים הראשונים, בהתאם לדרך המודגמת.

האם הביטוי שמצאתם זהה לביטוי שקיבלתם במשימה הקודמת?

3. א. חשבו את הסכום של עשרת המספרים הטבעיים הראשונים בשלוש דרכים שונות.

איזה מן החישובים היה המהיר ביותר?

ב. לפניכם רעיון של דרך נוספת לחישוב הסכום של עשרת המספרים העוקבים הראשונים.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 & + & 8 & + & 9 & + & 10 \\
 10 & + & 9 & + & 8 & + & 7 & + & 6 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 11 & + & 11 & + & 11 & + & 11 & + & 11 & + & 11 & + & 11 & + & 11 & + & 11 & + & 11
 \end{array}$$

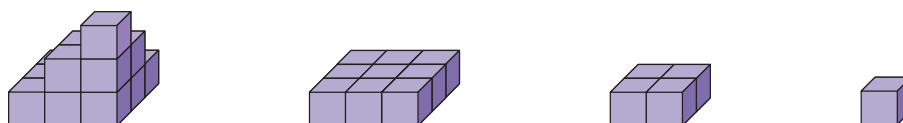
לאיזו הדגמה גאומטרית מתאימה דרך זו?

4. א. כמה מספרים עוקבים החל מ-1 צריך לחבר כדי שסכומם יהיה 210?

ב. כמה מספרים עוקבים החל מ-6 צריך לחבר כדי שסכומם יהיה 105?

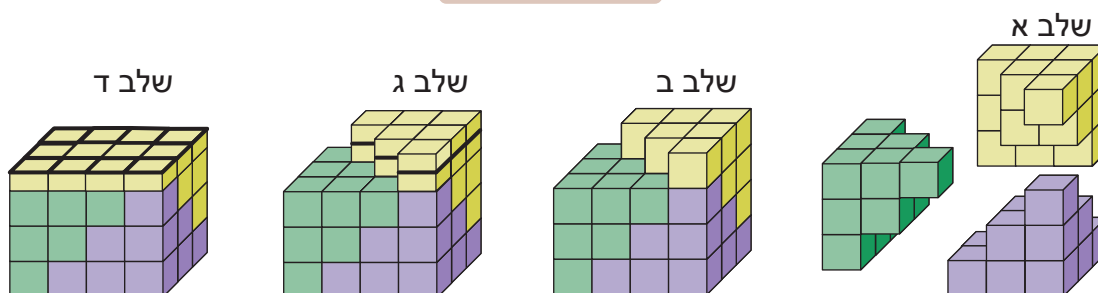
סכום ריבועי הטבעיים

5. הקוביות שלפניכם מדגימות ריבועים של המספרים הטבעיים החל מ-1, והמבנה משמאלן מדגים סכום של ריבועים אלו.

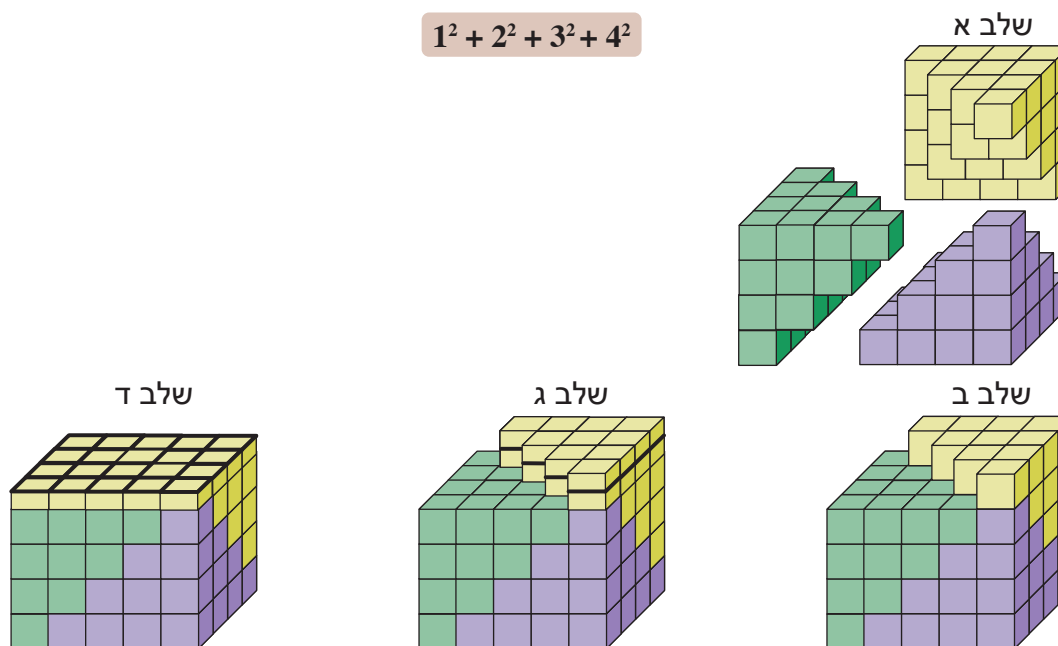


לפניכם דרך לחישוב סכום ריבועים של n מספרים טבעיים עוקבים החל מ-1.

$$1^2 + 2^2 + 3^2$$



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$



א. השתמשו בדרך זו כדי לכתוב כמכפלה ולחשב את הסכום $1^2 + 2^2 + 3^2$.

ב. מה יהיו מידות התיבה שתתקבל על-ידי הרכבת שלוש "פירמידות" כאלה בגובה 6 יחידות?

ג. השתמשו בדרך זו כדי לכתוב כמכפלה ולחשב את הסכום

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

בדקו במחשבון.

ד. הכלילו את השיטה הזאת לסכום הריבועים של n המספרים הטבעיים הראשונים.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

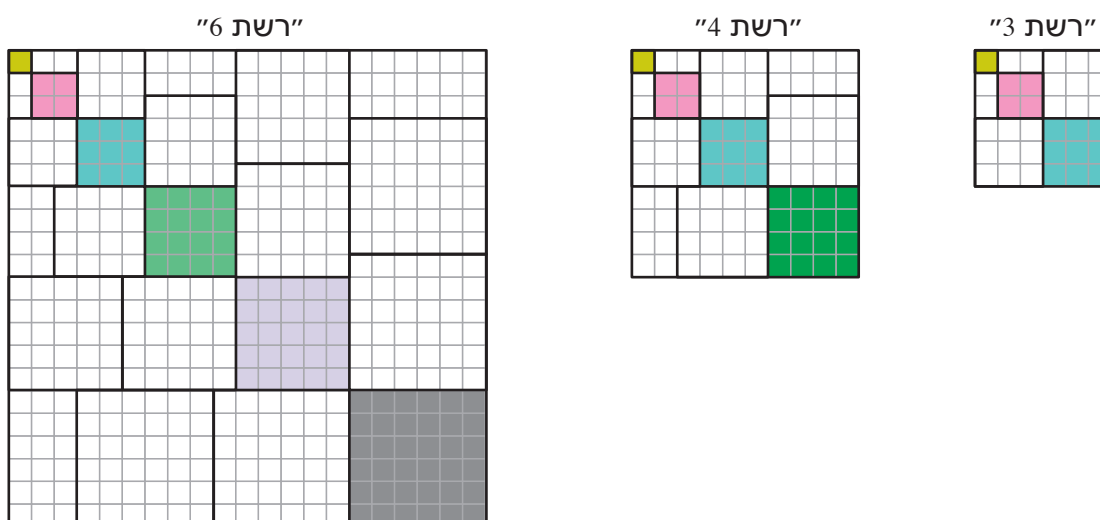


ה. רשמו את המספר 1240 כסכום ריבועים, על-ידי שימוש במחשבון בפעולת הכפל ובפעולת החילוק בלבד.

סכום חזקות 3 של הטבעיים

6. נתונה סדרה של רשתות משובצות.

לפניכם הרשתות השלישית, הרביעית והשישית בסדרה.



א. אורך צלע של כל משבצת הוא יחידה אחת.

בטאו את השטח של רשת 3 ושל רשת 4 בשתי הדרכים האלה:

- כסכום שטחי החלקים
 - כשטח הריבוע הנוצר על-ידי גבולות הרשת
- בדקו אם קיבלתם תוצאות שוות בשתי הדרכים.

ב. מצאו את השטח של רשת 6 בשתי דרכים שונות.

ג. מצאו את השטח של רשת 10 בשתי דרכים שונות.

ד. הכלילו ורשמו את השטח של רשת n בשתי צורות שונות.

ה. אילו משלושת השוויונות הבאים נכונים? הסבירו כיצד מצאתם.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{(1+n)^2 n^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)^2$$

ו. חשבו $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3$ על-ידי שימוש במחשבון בפעולות הכפל והחילוק בלבד.



ז. רשמו את 14,400 כסכום של חזקות שלישיות.



7. השתמשו בגיליון אלקטרוני (למשל Excel), כדי לאשר את השוויונות שמצאתם עבור הסכומים השונים.

הדרכה: הכינו טבלה כמו זו:

	A	B	C	D	E	F
	המספרים הטבעיים	סכום המספרים הטבעיים	הריבועים של המספרים הטבעיים	סכום הריבועים של המספרים הטבעיים	חזקות 3 של המספרים הטבעיים	סכום חזקות 3 של המספרים הטבעיים
2	1	1	1	1	1	1
3						

- מלאו את העמודות A, C, ו-E.
- כדי למלא, למשל, את טור הסכומים של המספרים הטבעיים, רשמו בתא B3 את הנוסחה $= B2 + A3$ וגררו. המחשב יוסיף לסכום עד מקום מסוים את המספר הטבעי הבא בתור.
- פעלו באותה דרך כדי למלא את שאר עמודות הסכומים.
- בדקו את החישובים שעשיתם בפעילות.



שומרים על כושר

1. בפעילות למדנו כי
- $$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2 = \frac{(1+n)^2 n^2}{4} = \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)^2$$
- כתבו שישה ביטויים אלגבריים שונים נוספים הזחים לביטויים הנתונים.



באיזו ספרה מסתיימת תוצאת הסכום הבא?

$$7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{49}$$

באילו שתי ספרות מסתיימת תוצאת הסכום?