

## 4.5 על מכפלות



1. א. נסתכל על מכפלת 27 המספרים הטבעיים הראשונים:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 27$$

כמה אפסים בסופה של תוצאת המכפלה הזאת?

מכפלת כל המספרים הטבעיים מ-1 ועד מספר מסוים נקראת העצרת של אותו מספר. את העצרת של מספר כלשהו  $n$  מסמנים באמצעות סימן קריאה מימין למספר, כך:  $n!$ . המכפלה הנתונה במקרה שלנו היא  $27!$  ("עצרת 27").

ב. ל- $n!$  יש 8 אפסים בסוף המספר. מה תוכלו לומר על ערכו של  $n$ ?

ג. כמה אפסים יש בתוצאת החילוק הבא:  $\frac{40!}{30!}$ ?

ד. מכפילים את המספרים הזוגיים מ-2 ועד 20:  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20$ .

כמה אפסים בסופה של תוצאת המכפלה הזאת?



בתוכנת Excel פעולת העצרת נרשמת כך: `fact()`. למשל, כדי לחשב את  $15!$ , רושמים את הנוסחה `=fact(15)`.

תוכנת Excel רושמת אומדן של תרגילים שתוצאתם גדולה בכתיב מדעי. למשל, תוכנת Excel מעגלת את  $15!$  למספר "1.3077E+12" (כלומר,  $1.3077 \times 10^{12}$ ). במקרים כאלה, כדי למצוא את הספרות האחרונות משתמשים בפקודת `right()`. למשל, כדי למצוא את 5 הספרות האחרונות של  $15!$ , רושמים את הנוסחה `=right(A2,5)`, ומקבלים 68,000 [בהנחה ש-`fact(15)` היה רשום בתא A2].

**שימו לב:** גם הדיוק של פעולת `right()` מוגבל, ועבור מספרים גדולים מאוד היא מספקת אומדנים שאינם מאפשרים למצוא את הספרות האחרונות של מספר.

- השתמשו בפקודות אלה כדי לבדוק את תשובותיכם למשימה 1.
- חקרו מקרים נוספים של שימוש בפעולת עצרת ושל מכפלות אחרות, המציאו שאלות נוספות על מכפלות וענו עליהן.

2. המיקוד של **מעין** הוא מספר בעל 5 ספרות, והספרות הן 2, 3, 4, 6, ו-7.  
מעין שמה לב כי כל שתי ספרות סמוכות במיקוד (ראשונה ושנייה, שנייה ושלישית וכן הלאה) יוצרות מספר דו-ספרתי שהוא מכפלה של שני חד-ספרתיים.  
מצאו את המיקוד של מעין. תארו את כל השיקולים שהפעלתם כדי למצוא אותו.

3. מכפלת שלושה מספרים שלמים וחיוביים היא 720.

א. כתבו 3 מכפלות כאלה.

ב.  $x$  מייצג את הגורם הקטן ביותר בין שלושת הגורמים. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי עבור הגורם  $x$ ?

4. **יונתן** צעיר בשנתיים מאשתו **אילנה**.

בשנה זאת, הגילים של שניהם הם מספרים ראשוניים.

בשנה הבאה, הגיל של אילנה יהיה כפולה של 11 והגיל של יונתן ישווה למכפלה של שני מספרים עוקבים.

בני כמה יונתן ואילנה בשנה זאת?



5. **רויטל** בחרה שלוש ספרות שונות (ושונות מאפס).

היא יצרה את כל המספרים התלת-ספרתיים האפשריים משלוש הספרות האלה וחיברה אותם.

רויטל שמה לב כי הסכום שקיבלה ניתן לכתיבה כמכפלת שני מספרים עוקבים.

מהן שלוש הספרות שאותן בחרה רויטל?



\*6. מצאו מספר בעל 10 ספרות שמתחלק ב-11 ללא שארית, ובו כל ספרה מופיעה פעם אחת בדיוק.

**רמז:** כדי לבדוק אם מספר מתחלק ב-11:

- מחברים ומפחיתים לסירוגין את הספרות של המספר.

- אם התוצאה מתחלקת ב-11, אז המספר מתחלק ב-11.

**מחשבים:** כדי לבדוק אם המספר 28,479 מתחלק ב-11, מחשבים  $0 = 9 + 7 - 4 + 8 - 2$ .

מאחר ש-0 מתחלק ב-11, סימן שהמספר 28,479 מתחלק ב-11.

\* מתוך אולימפיאדת זוטא תשע"ג - שאלון לכיתה ז' - שלב ב', מכון דוידסון לחינוך מדעי

<http://davidson.weizmann.ac.il/compzuta>



במשך מאות שנים שימש מפתח ההצפנה של הודעות גם להצפנה וגם לפענוח, והשתנה לעתים קרובות מחשש לגילוי. הבעיה העיקרית בהצפנה מסוג זה כרוכה בהפצת המפתח.

בשנת 1975 המדען האמריקני ויטפילד דיפי (Whitfield Diffie), העלה את הרעיון של יצירת שני מפתחות: אחד לשימוש של מצפיני ההודעה – מפתח ציבורי, והשני לשימוש של מפענחי ההודעה – מפתח פרטי. גדולתו של רעיון המפתח הציבורי והמפתח הפרטי הייתה בכך שכעת, בניגוד לכל רעיונות ההצפנה הקודמים, אין צורך להסתיר את מפתח ההצפנה, מכיוון שלמקבלי ההודעה המוצפנת יש מפתח אחר, פרטי ולא ידוע לציבור.

בשנת 1977 שלושה מדעני מחשב ומתמטיקאים – רון ריווסט, ליאונרד אדלמן (אמריקנים) ועדי שמיר (ישראלי ממכון ויצמן) מצאו פונקציה מתמטית שתאפשר הצפנת הודעה ללא אפשרות פענוח על-ידי אותו מפתח ההצפנה, אלא על-ידי מפתח פענוח שונה.

בהצפנת RSA (Rivest, Shamir, Adelman), המפתחות מבוססים על המכפלה של שני מספרים ראשוניים. נניח שהמספרים הראשוניים הם  $p$  ו- $q$ , ומכפלתם היא  $N$ . מפענחי ההודעות בוחרים את שני המספרים הראשוניים ושולחים למצפיני ההודעות את המפתח הציבורי המבוסס על  $N$ . המפתח הציבורי מאפשר שליחת הודעות באמצעות  $N$ . שני הגורמים הראשוניים ( $p$  ו- $q$ ) של  $N$  מהווים תשתית למפתח הפענוח הפרטי, ולכן רק מקבלי ההודעות (ואפילו לא המצפינים) יוכלו לפענח את ההודעות. שבירת קוד הפענוח תלויה בידיעת המספרים הראשוניים שנבחרו, ואם המספרים האלה גדולים מאוד, נדרש זמן חישוב רב – עד כדי שנים, ואפילו במחשב חזק מאוד – על מנת לגלותם. מתמטיקאים רבים מנסים לפצח את הבעיה של מציאת הגורמים של מכפלת שני מספרים ראשוניים גדולים, אבל עד כה לא נפרצה שיטת ההצפנה RSA.



## שומרים על כושר

1. ידוע כי  $6! = 720$ .

חשבו את תוצאות התרגילים הבאים מבלי להיעזר במחשבון.

א. $10 \cdot 6! =$	ג. $6! + 6! =$	ה. $\frac{6!}{10} =$	ז. $\frac{6!}{4!} =$
ב. $6! + 10 =$	ד. $2! + 4! =$	ו. $\frac{6!}{5!} =$	ח. $\frac{6!}{2! \cdot 4!} =$

2. סמנו  $>$  או  $<$  או  $=$

א. $8! \blacksquare 9!$	ג. $8! \blacksquare \frac{9!}{9}$	ה. $10! \cdot 11 \blacksquare 11!$	ז. $\frac{12!}{6!} \blacksquare 2!$
ב. $8! \cdot 2 \blacksquare 9!$	ד. $\frac{8!}{8!} \blacksquare \frac{9!}{9!}$	ו. $14! \cdot 20 \blacksquare 15!$	ח. $\frac{8!}{4!} \blacksquare 4!$

3. רשמו כמה אפסים יש בסופן של תוצאות התרגילים הבאים:

א. $10^6$	ג. $1000^3$	ה. $2^{10}$	ז. $10^9 + 1$
ב. $100^2$	ד. $5^6$	ו. $5^5 \cdot 2^5$	ח. $10^9 + 10^5$

## חידה



שנה נחשבת כ- "מושלמת" אם סכום הספרות שלה הוא מספר ריבועי (למשל, 1, 4, 9, 16, ...).

2002 הייתה "שנה מושלמת" כי  $2 + 0 + 0 + 2 = 4 = 2^2$ .

מה תהייה "השנה המושלמת" האחרונה באלף הזה (עד שנת 3000)?