8.4 מספרים משולשים וארבעוניים

- הכרה של המספרים המשולשים ובניית הסדרה שלהם באמצעות כלל נסיגה ובאמצעות ביטוי אלגברי;
- הכרה של המספרים הארבעוניים ובניית הסדרה שלהם באמצעות כלל נסיגה ובאמצעות ביטוי אלגברי;
- מציאת קשר בין סדרות המספרים
- המשך חקירת התכונות של משו לש פסקל: מציאת הקשר בין המספרים המשולשים והארבעוניים ובין משולש פסקל

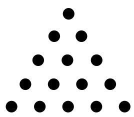
שקף של משולש פסקל

מתייחסים לסיפור התפוזים ומבקשים לשרטט במחברת את הצורה הרביעית

ייתכן שיהיו תלמידים שישרטטו משולש ריק. ממשיכים וקוראים את הגדרת *מספר משולש*, כדי לפסול שרטוט כזה.

מתייחסים גם למספרים הריבועיים שאפשר להציג באופן גיאומטרי כריבועים מלאים שלתפוזים.

הפעילות עוסקת במספרים משולשים וארבעונים המודגמים בייצוג גיאומטרי ובייצוג אלגברי: המספר המשולש ה-n הוא סכום המספרים טבעיים מ- 1 ועד n (כולל). בייצוג הגיאומטרי הוא מורכב מ- n שורות של נקודות (תפוזים) כך שבשורה הראשונה מלמעלה יש נקודה אחת, ובכל שורה נקודה אחת יותר לעומת מספר הנקודות שבשורה הקודמת – דבר היוצר מבנה משולש.



את הייצוג המספרי של סדרת המספרים המשולשים אפשר לקבל בשתי דרכים:

- בעזרת כלל נסיגה, כלומר על־ידי תוספת n למספר המשולש שלפניו,
- בעזרת ביטוי אלגברי לסכום המספרים הטבעיים מ-1 ועד n.

מצפים מהתלמידים למצוא את שתי הדרכים בעצמם

המספר הארבעוני ה- n הוא סכום המספרים המשולשים מ- 1 (המספר המשולש הראשון), ועד המספר המשולש ה- n (כולל). בייצוג הגיאומטרי הוא מורכב מ- n קומות של נקודות (תפוזים) כך שבקומה הראשונה מלמעלה יש נקודה אחת (המספר המשולש הראשון), ובכל קומה נוסף המספר המשולש הבא של נקודות , דבר היוצר מבנה של פירמידה משולשת (ארבעון).

גם במקרה זה אפשר לקבל את הייצוג המספרי של סדרת המספרים הארבעוניים בשתי דרכים:

- על-ידי כלל נסיגה כלומר, על-סמך המספר הקודם לו.
- על-ידי ביטוי אלגברי לחישוב מספרים ארבעוניים לפי הערך של מקומם בסדרה. התלמידים מקבלים ביטוי זה ללא הסבר של הדרך בה ניתן לגלותו, והם משתמשים בו כדי לבדוק את חישוביהם בעזרת כלל נסיגה.

בסיום הפעילות מקשרים את הסדרות החדשות למשולש פסקל מהפעילות הקודמת.

1. שמונת המספרים המשולשים הראשונים הם: 36 , 28 , 21 , 15 , 10 , 6 , 3 , 1

2. א. המספר המשולש ה- 101 הוא 5151 (= 101 + 5,050)

ב. אפשר לחשב את המספר המשולש ה- n, על-ידי הוספת n למספר המשולש ה- (n – 1)

3. א המספר המשולש ה- 10 הנרמז באיור הוא 55 (= 11 · 5). יוצרים 5 זוגות של מספרים טבעיים מ- 1 ועד 10, כך שסכום המספרים בכל זוג הוא 11.

המספר המשולש ה- 20 הוא 210 (= 21 · 10). יוצרים 10 זוגות של מספרים טבעיים מ- 1 ועד 20, כך שסכום המספרים בכל זוג הוא 21.

המספר המשולש ה- 15 הוא 120 (= 16 · 7.5). יוצרים 7.5 זוגות של מספרים טבעיים מ- 1 ועד 15, כך שסכום המספרים בכל זוג הוא 16. המספר האמצעי בסדרת המספרים הטבעיים הוא 8 והוא שווה-ערך למחצית סכום של זוג.

ב. סכום כל זוג: n + 1

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

n + 1

n + 1

n + 1

n + 1

מספר הזוגות: $\frac{n}{2}$

לכן סכום n המספרים הטבעיים הראשונים הוא $\frac{n}{2}(n+1)$

אם מספר המספרים אינו זוגי, לפעמים נוח יותר לקבל את הביטוי האלגברי בדרך הבאה:

מספר הנקודות במספר המשולש ה- n הוא $1 + 2 + 3 + \dots + n$

כדי לקבל את הביטוי האלגברי מחברים סכום זה לעצמו באופן הבא:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline (n+1) & & (n+1) & & (n+1) & & \dots & & (n+1) & & (n+1) \end{array}$$

לפיכך, הערך של שני סכומים כאלה הוא n(n + 1)

ולכן הערך של סכום זה (שהוא גם המספר המשולש ה- n) הוא 0.5n(n + 1) .

4. א-ב. התלמידים רושמים כותרות עבור העמודות A ו- B, לפי בחירתם.

ממלאים את העמודה A בסדרת המספרים הטבעיים, ורושמים נוסחת נסיגה עבור עמודה B.

	A	B
1	המספרים הטבעיים	המספרים המשולשים (על-פי המספר הקודם)
2	1	1
3	2	=B2+A3

אחרי גרירת הביטוי כלפי מטה נקבל:

	A	B
1	המספרים הטבעיים	המספרים המשולשים (על-פי המספר הקודם)
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45
11	10	55

ג. ממשיכים ורושמים כותרת עבור עמודה C, ורושמים נוסחה לפי מקום עבור עמודה זו.

	A	B	C
1	המספרים הטבעיים	המספרים המשולשים (על-פי המספר הקודם)	המספרים המשולשים (על-פי נוסחה)
2	1	1	=0.5*A2*(A2+1)
3	2	=B2+A3	

אחרי גרירת הביטוי כלפי מטה נקבל:

	A	B	C
1	המספרים הטבעיים	המספרים המשולשים (על-פי המספר הקודם)	המספרים המשולשים (על-פי נוסחה)
2	1	1	1
3	2	3	3
4	3	6	6
5	4	10	10
6	5	15	15
7	6	21	21
8	7	28	28
9	8	36	36
10	9	45	45
11	10	55	55

5. א. השימוש בכלל נסיגה למציאת מספר כלשהו בסדרה מחייב את מציאת כל המספרים שלפניו . כך למשל, מציאת המספר העשירי בסדרה תלויה במציאת המספר התשיעי התלויה במציאת המספר השמיני וכו', כלומר, תלויה במציאת תשעת המספרים שלפניו: 45 ,36 ,28 ,21 ,15 ,10 ,6 ,3 ,1. לכן, המספר העשירי הוא 55 (= 10 + 45).

ב. השימוש בביטוי אלגברי לפי מקום , מאפשר חישוב ישיר של מספר מסוים בסדרה , מבלי לחשב את קודמיו.

כך למשל, המספר השמיני הוא 36 $[= \frac{8}{2}(8+1)]$

6. א. אפשר לראות כי כל ערמת תפוזים מורכבת מקומות של תפוזים שמספרם מייצג מספרים משולשים, ובכל פעם יש להוסיף את המספר המשולש הבא.

מקום	1	2	3	4	5
מספר משולש	1	3	(3 + 3 =) 6	(6 + 4 =) 10	(10 + 5 =) 15
מספר ארבעוני	1	4	(4 + 6 =) **10**	(**10** + 10 =) **20**	(**20** + 15 =) **35**

ב. המספר הארבעוני ה- 16 שווה לסכום של מספר הארבעוני ה- 15, ושל המספר המשולש ה- 16.

לפי הנוסחה לחישוב המספר המשולש ה- 16, המספר שווה ל- 136 $[= \frac{16}{2}(16+1)]$.

לכן, המספר הארבעוני ה- 16 שווה ל- 816 (= 136 + 680).

7. לפי הביטוי הנתון המספר הארבעוני ה- 15 שווה ל- 680 $(= \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{6})$.

לפי אותו ביטוי, המספר הארבעוני ה- 16 שווה ל- 816 $(= \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{6})$

ואכן, קיבלנו אותם מספרים בשתי הדרכים.

8. א. סדרת המספרים המשולשים נמצאת ב"קליפה" השלישית של משולש פסקל.

סדרת המספרים הארבעוניים נמצאת ב"קליפה" הרביעית של משולש פסקל.

ב. סכום שני המספרים המשולשים הראשונים נמצא במקום השני ב"קליפה" הרביעית.

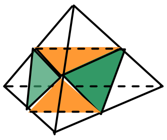
סכום שלושת המספרים המשולשים הראשונים נמצא במקום השלישי ב"קליפה" הרביעית.

סכום ארבעת המספרים המשולשים הראשונים נמצא במקום הרביעי ב"קליפה" הרביעית.

ג. סכום n המספרים המשולשים הראשונים נמצא במקום ה- n ב"קליפה" הרביעית.

הסבר: המספר הארבעוני ה- n שווה לסכום n המספרים המשולשים הראשונים . המספרים ה משולשים מופיעים ב"קליפה" השלישית, לכן סכום המספרים המשולשים עד מקום מסוים שהוא מספר ארבעוני, מופיע ב"קליפה" הרביעית – "קליפת" המספרים הארבעוניים, באותו מקום ב"קליפה" כמו מקום המספר המשולש האחרון שחיברנו.

נוצר תמניון (ראו בפינת "הידעתם?").



כתוצאה מפעולת הליטוש , נותרו מן הפאות של הארבעון המקורי 4 משולשים שווי-צלעות ששטחם רבע מן הפאה המקורית (בשרטוט צבועים בירוק). כמו כן , כתוצאה מניסור הפירמידות, נוצרו 4 משולשים שווי-צלעות נוספים בעלי אותו שטח (בשרטוט צבועים בכתום).

למסיימים

1. אם יצרתם על מחשב את סדרת המספרים המשולשים ,

א. המשיכו וצרו בגיליון האלקטרוני את סדרת המספרים הארבעוניים באמצעות כלל נסיגה , כלומר על-ידי תוספת של המספר המשולש ה- n למספר הארבעוני שלפניו.

ב. המשיכו וצרו בגיליון האלקטרוני את סדרת המספרים שב"קליפה" החמישית באמצעות כלל נסיגה , על-סמך המספרים הארבעוניים .

תשובה: התלמידים רושמים כותרות עבור שתי עמודות נוספות, ורושמים עבורן נוסחאות נסיגה.

	A	B	C	D
1	**המספרים הטבעיים**	**המספרים המשולשים (על-פי המספר הקודם)**	**המספרים הארבעוניים (על-פי המספר הקודם)**	**המספרים ב"קליפה" החמישית (על-פי המספר הקודם)**
2	1	1	1	1
3	2	=B2+A3	=C2+B3	=D2+C3

אחרי גרירת הנוסחאות כלפי מטה נקבל:

	A	B	C	D
1	**המספרים הטבעיים**	**המספרים המשולשים**	**המספרים הארבעוניים (על-פי המספר הקודם)**	**המספרים ב"קליפה" החמישית (על-פי המספר הקודם)**
2	1	1	1	1
3	2	3	4	5
4	3	6	10	15
5	4	10	20	35
6	5	15	35	70
7	6	21	56	126

2. א. רשמו לפחות 6 סכומים של זוג מספרים משולשים סמוכים.

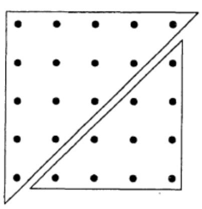
למשל: $1 + 3 = 4$ $3 + 6 = 9$

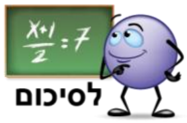
ב. מצאו חוקיות בסכומים אלה. נסו להסביר מדוע היא קיימת.

תשובה: כל סכומי הזוגות הם מספרים ריבועיים.

אם נסמן את המספר המשולש ה- n ב- T_n ואת המספר המשולש העוקב לו בסדרה נסמן ב- T_{n+1} , הטענה המובעת היא: $T_n + T_{n+1} = (n + 1)^2$

השרטוט משמאל משמש הסבר גאומטרי לתכונה זאת.





- מתייחסים לשתי הדרכים לבניית סדרות המספרים המשולשים והמספרים הארבעוניים – כלל נסיגה, וביטוי אלגברי לפי מקום המספר בסדרה. מתייחסים ליתרונות ולחסרונות של כל דרך.
  - כלל הנסיגה הוא בדרך כלל פשוט יותר מן הביטוי האלגברי, אבל כדי למצוא מספר בסדרה יש צורך למצוא את כל קודמיו.
  - הביטוי האלגברי מאפשר את מציאתו של מספר בסדרה באופן ישיר (כלומר, מבלי לחשב את קודמיו), אבל תהליך הגילוי של הביטוי הוא קשה יותר.

- דנים בקשר בין המספרים המשולשים לבין המספרים הארבעוניים (ראו מדור פתרונות והערות)

- בודקים כיצד הקשר הזה מתבטא במשולש פסקל: ה"קליפה" הרביעית מכילה את סדרת המספרים הארבעוניים, וכל מספר בה נוצר על-ידי סכום המספרים המשולשים הנמצאים ב"קליפה" השלישית עד אותו מקום.

- בודקים את הקשר בין המספרים הארבעוניים למספרים ב"קליפה" החמישית, ומגלים שהוא דומה לקשר שראינו בין שתי ה"קליפות" הקודמות, ולקשר הקיים בין כל זוג "קליפות" סמוכות.