8.2 סיכויים

- הכרה אינטואיטיבית של התפלגות בינומית בעלת סיכויי הצלחה וכישלון שווים על-ידי שימוש ב "דיאגרמות מסלולים" לספירת האפשרויות המתאימות
- היכרות עם סיטואציות נוספות הניתנות לביסוס על המודל של משולש פסקל

אין

קוראים את משימת הפתיחה , ועונים על שאלה 1. חלק מן התלמידים ישערו כי הסיכויים לכל הרכב הוא $\frac{1}{3}$. לכן מבקשים מן התלמידים שיפרטו את ההרכבים השונים בהתחשב בסדר הלידות . הם ייווכחו לדעת שיש ארבע הרכבים, שרק אחד מתוכם הוא של שני בנים, לכן הסיכוי להרכב זה הוא $\frac{1}{4}$. הרכב נוסף הוא של שתי בנות, לכן גם הסיכוי להרכב זה הוא $\frac{1}{4}$. לעומת זאת יש שני הרכבים של ילדים ממין שונה (בת-בן ובין-בת לפי סדר הלידה), לכן הסיכוי להרכב זה הוא $\frac{1}{2}$.

הפעילות עוסקת בהתפלגות בינומית בעלת סיכויי הצלחה וכישלון שווים. לספירת האפשרויות המתאימות משתמשים ב"דיאגרמות מסלולים" הדומות לרשתות שבפעילות הקודמת (8.1) לספירת האפשרויות המתאימות . מדגישים כי "דיאגרמת מסלולים" דומה לדיאגרמת העץ בה משתמשים לחישוב הסתברות, למראית עין בלבד . ייתכן שחלק מן התלמידים יגלו את החוקיות כי

- מספר ההרכבים האפשרי למשפחה גדל פי 2 כשנוסף ילד אחד למשפחה.

- למשפחה בת n ילדים מספר ההרכבים הוא 2^n.

מתייחסים לכך במליאה, רק אם רוב התלמידים גילו זאת. נושאים אלו יטופלו באופן שיטתי בפעילות הבאה.

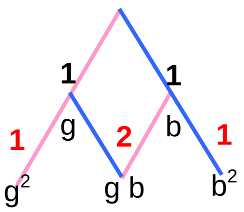
1. ראו בפתיחה.

.2 יש 4 (= 1 + 2 + 1) אפשרויות

הסיכויים לשתי בנות במשפחה: $\frac{1}{4}$

הסיכויים לשני בנים במשפחה: $\frac{1}{4}$

הסיכויים לבת ובן (לאו דוקא בסדר זה) במשפחה: $\frac{1}{2}$



.3 א. ראו שרטוט.

ב. במשפחות שיש בהן ארבעה ילדים, יש בסך-הכל 16 (= 1 + 4 + 6 + 4 + 1) הרכבים שונים.

הסיכויים להרכבים הבאים הם:

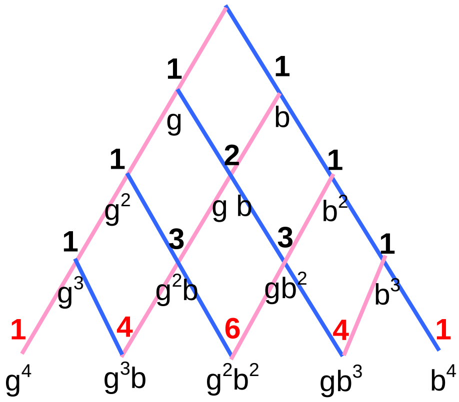
רק בנות: $\frac{1}{16}$ מהמשפחות

רק בנים: $\frac{1}{16}$ מהמשפחות

שני בנים ושתי בנות: $\frac{3}{8}$ $(=\frac{6}{16})$ מהמשפחות

בת ושלושה בנים: $\frac{1}{4}$ $(=\frac{4}{16})$ מהמשפחות

בן ושלוש בנות: $\frac{1}{4}$ $(=\frac{4}{16})$ מהמשפחות



.4 א. במשפחות שיש בהן חמישה ילדים, יש בסך-הכל 32 (= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1) הרכבים שונים.

הסיכוי להרכב של 5 בנים הוא: $\frac{1}{32}$.

המסלול המתאים להרכב זה מקווקו.

ב. במשפחות שיש בהן שבעה ילדים, יש בסך-הכל

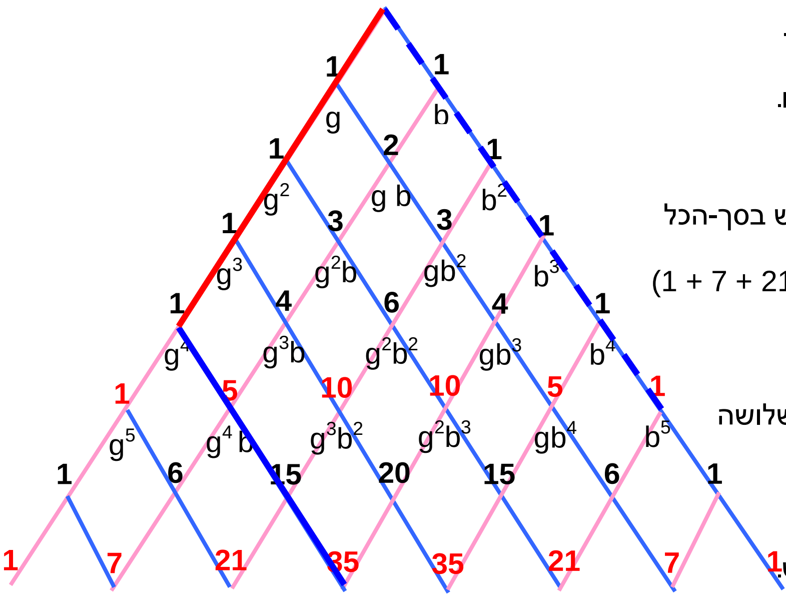
128 (= 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1)

הרכבים שונים.

הסיכוי להרכב של ארבע בנות ושלושה

בנים, לפי סדר זה, הוא: $\frac{1}{128}$

המסלול המתאים להרכב זה מודגש.



.5 במבט ראשון נראה כי "ההתנהגות המוזרה" של תושבי היישוב תוביל למספר גדול יותר של בנות לעומת בנים.

בחשיבה שנייה מסתבר שכמו בכל מקום אחר, גם ב"בנבנימה" מספר הבנות ישווה בערך למספר הבנים.

להלן שני הסברים אפשריים.

- במבט יישובי, ההחלטה של התושבים תשפיע על הרכבי המשפחות, אך לא על הלידות עצמן. נשות היישוב ימשיכו ללדת לפי חוקי הטבע ב נים ובנות באותה מידה בקירוב . האיזון בין מספר הבנים ומספר הבנות נשמר על-ידי השינויים שחלים בשכיחויות של המשפחות בעלות הרכבים שונים : הרכבים מסוימים לא יהיו קיימים, השכיחות של הרכבים אחרים תגדל או תקטן בהשוואה להתפלגות הצפויה ביישוב רגיל.
- נניח כי ביישוב 1000 נשים שיולדות. כדי לעקוב ביתר קלות אחר הלידות, נניח כי כל אישה יולדת מדי שנה – בהתאם למדיניות היישוב – כלומר מפסיקה ללדת עם הולדת הבן הראשון.

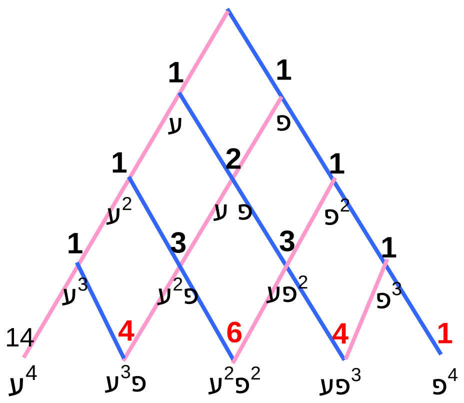
התוצאות הצפויות ב- 3 השנים הראשונות הן:

	בנים	בנות
שנה 1	500	500
שנה 2	250	250
שנה 3	125	125

וכך הלאה.

ניתן לראות כי בכל שלב האיזון בין מספר הבנים ומספר הבנות נשמר.

6. א. ראו שרטוט.



ב. כאשר מטילים מטבע 4 פעמים, יש בסך-הכל

16 (= 1 + 4 + 6 + 4 + 1) מצבים.

הסיכויים למצבים הבאים הם:

"עץ" בכל ארבע ההטלות: $\frac{1}{16}$. המסלול הקיצוני השמאלי.

פעמיים "עץ" ופעמיים "פלי" (לאו דווקא בסדר זה):

$\frac{3}{8}$ $(=\frac{6}{16})$. ששת המסלולים המגיעים אל הקודקוד ע^{2}פ^2.

המסלול המראה את הסיכויים לקבל פעמיים "עץ" ופעמיים "פלי" בסדר זה דווקא, הוא מסלול אחד בלבד, לכן הסיכוי לכך הוא $\frac{1}{16}$.

לפחות פעמיים "עץ": כלומר, מתוך ארבע ההטלות המטבע ייפול על "עץ" פעמיים או שלוש פעמים או ארבע פעמים. התשובה היא: $\frac{11}{16}$ $(=\frac{6+4+1}{16})$. 11 המסלולים המגיעים אל הקודקוד ע^{2}פ^2 או אל הקודקוד ע^{3}פ או אל הקודקוד ע^4. מסלולים אלו מייצגים את המצבים : פעמיים "פלי" ופעמיים "עץ", או פעם "פלי" ושלוש פעמים "עץ", או ארבע פעמים "עץ".

לכל היותר פעמיים "עץ": כלומר, מתוך ארבע ההטלות המטבע לא ייפול כלל על "עץ", או ייפול על "עץ" פעם אחת, או פעמיים. התשובה היא: $\frac{11}{16}$ $(=\frac{1+4+6}{16})$. 11 המסלולים המגיעים אל הקודקוד פ^4 או אל הקודקוד פ^{3}ע או אל הקודקוד ע^{2}פ^2. מסלולים אלו מייצגים את המצבים: ארבע פעמים "פלי", או שלוש פעמים "פלי" ופעם אחת "עץ", או פעמיים "פלי" ופעמיים "עץ"

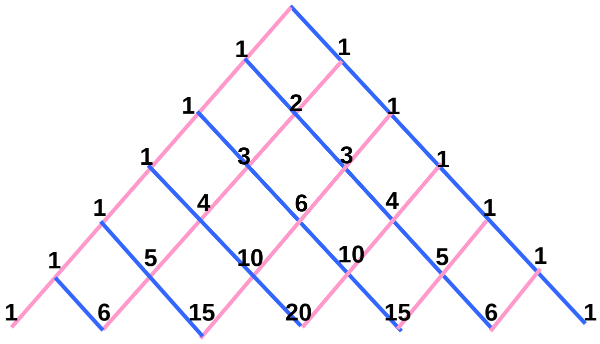
ג. מתוך 100 פעמים ברצף יש לשער שהמטבע ייפול על:

"עץ" בכל ארבע ההטלות: כ- 6 ($\approx 100\cdot\frac{1}{16}$) פעמים.

פעמיים "עץ" ופעמיים "פלי" (לאו דוקא בסדר זה): כ- 38 ($\approx 100\cdot\frac{3}{8}$) פעמים.

לפחות פעמיים "עץ": כ- 69 ($\approx 100\cdot\frac{3}{8}$) פעמים, וכך גם עבור **לכל היותר פעמיים "עץ"**.

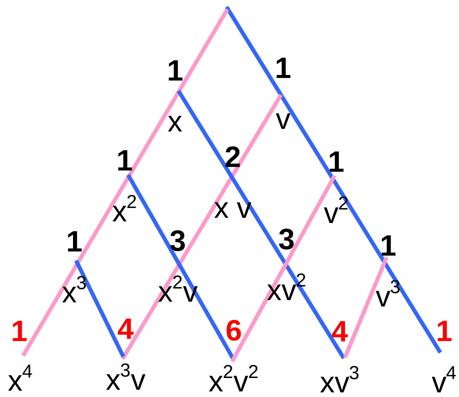
כדאי לשים לב כי סכום מספרי הפעמים בכל הסעיפים עולה על 100. אמנם כיסינו את כל המצבים, אבל ספרנו מצבים מסוימים יותר מפעם אחת.



7. א. במשפחות שיש בהן שישה ילדים, יש בסך-הכל 64 (= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1) הרכבים שונים. התשובה היא $\frac{1}{64}$

ב. כאשר מטילים מטבע פעמיים, יש בסך-הכל 4 מצבים. מתוכם יש שתי אפשרויות לקבל פעם "עץ" ופעם "פלי". התשובה היא $\frac{1}{2}$

ג. כאשר זורקים כדור לסל שלוש פעמים, יש בסך-הכל 8 מצבים. מתוכם יש אפשרות אחת של קליעה, קליעה, החטאה. התשובה היא $\frac{1}{8}$



ד. כאשר מנחשים תשובות לארבע שאלות על-ידי הטלת מטבע, יש בסך-הכל 16 (= 1 + 4 + 6 + 4 + 1) מצבים.

נסמן ב- v תשובה נכונה וב- x תשובה שגויה.

כדי שיואב יקבל 50 או יותר, הוא צריך לענות תשובה נכונה לפחות על שתי טענות. כלומר, לענות תשובה נכונה על 2 טענות, או לענות תשובה נכונה על 3 טענות, או לענות תשובה נכונה על 4 טענות. יש בסך-הכל 11 (= 1 + 4 + 6) מצבים כאלה. לכן התשובה היא $\frac{11}{16}$

א.

$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{5}{6}$
$1\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$1\frac{1}{12}$

ב.

$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
$1\frac{1}{6}$	1	$\frac{5}{6}$
$1\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$

למסיימים

1. בשקית יש שני כדורים. אדום ולבן. מוציאים כדור אחד ומחזירים אותו. כך עושים 3 פעמים.

א. מה הסיכויים שבכל הפעמים יוציאו כדור באותו צבע?

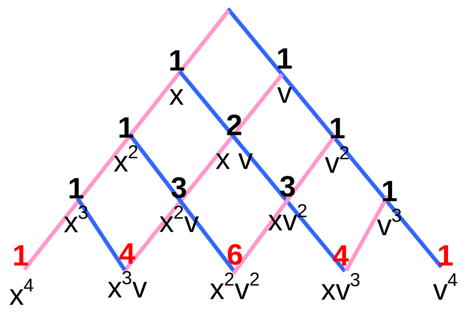
תשובה: כאשר מוציאים ומחזירים כדור שלוש פעמים יש בסך-הכל 8 מצבים. (ראו משולש המספרים)
מתוכם יש אפשרות אחת של אדום-אדום-אדום, ואפשרות אחת של לבן-לבן-לבן. התשובה היא $\frac{2}{8}$ כלומר $\frac{1}{4}$.

ב. מה הסיכויים שיוציאו כדורים בצבעים שונים?

תשובה: כאשר מוציאים ומחזירים כדור שלוש פעמים יש בסך-הכל 8 מצבים. לפי סעיף א בשניים מן המצבים הכדורים בצבע אחיד. לכן יש 6 אפשרויות של כדורים בשני צבעים. התשובה היא: $\frac{6}{8}$ כלומר $\frac{3}{4}$.

2. שלוש פאות של קובייה צבועות בכחול ושלוש פאות אחרות בחום. מטילים את הקובייה ארבע פעמים.
מהי ההסתברות שהקובייה תראה פעם אחת כחול ו- 3 פעמים חום?

תשובה: כאשר מטילים קובייה 4 פעמים, יש בסך-הכל
16 (= 1 + 4 + 6 + 4 + 1) תוצאות אפשריות.
נסמן ב- v את הא ירוע "הקובייה מראה כחול " וב- x את הא ירוע "הקובייה מראה חום".
יש 4 אפשרויות שבהם הקובייה מראה פעם אחת כחול ו- 3 פעמים חום. לכן התשובה היא $\frac{4}{16}$ כלומר $\frac{1}{4}$.



לסיכום

מסכמים את הסיטואציות השונות שהוצגו בפעילות באופן הבא:

- כל הסיטואציות מבוססות על סדרה של אירועים החוזרים על עצמם כאשר לכל אירוע שתי תוצאות אפשריות שהן שוות-סיכוי. דוגמאות לאירוע בודד: לידה של בן או בת; הטלת מטבע הנופלת על אחד משני צדדים.
- בכל סיטואציה בה מספר מסוים של חזרות על אירוע בודד מסוג זה, אותה שורת מספרים במשולש מתארת את התפלגות התוצאות

דוגמה: בכל הסיטואציות, התפלגות התוצאות לאחר 5 חזרות על האירוע הבודד היא 1 5 10 10 5 1
למשל, לגבי 5 לידות של בנים ובנות התפלגות התוצאות היא:

תוצאה	5 בנות	בן אחד ו-4 בנות	2 בנים ו-3 בנות	3 בנים ו-2 בנות	4 בנים ובת אחת	5 בנים
מס' תוצאות אפשריות	1	5	10	10	5	1

בפעילות הבאה נחקור את המספרים המתארים את התפלגות התוצאות ללא קשר לסיטואציה מסוימת