יחידה 8: משולש פסקל

8.1 בכמה דרכים?

מטרות

- גילוי תכונות מעניינות בקבוצות או סדרות של מספרים
- הכרת המבנה של משולש פסקל
- הכרה אינטואיטיבית של מושגים הסתברותיים

אמצעי עזר

שקף של רשת משבצות ריבועיות למורה

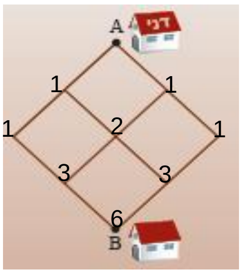
פתיחה

קוראים את משימת הפתיחה, מציגים רשת של 2 x 2 משבצות ריבועיות, ושואלים במליאה את השאלה של דני בפתיחה. רק אחרי שהתלמידים מתייגעים בספירה, עונים ביחד על שאלה 1. דואגים שכל התלמידים יבינו את האסטרטגיה של רישום מספר המסלולים בהם ניתן להגיע לכל צומת – שהוא סכום מספרי המסלולים המובילים לצמתים הסמוכים שמעליו. האסטרטגיה הזאת תשמש אותם במהלך הפעילויות הבאות.

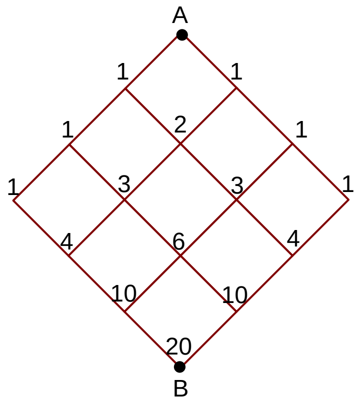
פתרונות והערות

הפעילות עוסקת במושגים ראשונים בקומבינטוריקה ובהסתברות. שתי הפעילויות הראשונות ביחידה זו מביאות סיטואציות מתחום הקומבינטוריקה המבוססות על המבנה של משולש פסקל, – המוצג באופן פורמלי בפעילות השלישית של היחידה. ניתנות דוגמאות של מציאת מספר האפשרויות (משימות 1, 2 ו- 4), ושל חקירת מצב שבו מספר האפשרויות נתון (משימה 3). כמו כן ניתנות דוגמאות שבהם צריך לחבר את מספרי האפשרויות (משימות 5- 7). התלמידים נחשפים לרשתות ומסלולים שונים, ומתרגלים את בנייתם, על-ידי רישום מספר המסלולים שמגיע לכל צומת. זוהי הקדמה לדיאגרמות המסלולים הנדרשות בהתפלגות בינומית (פעילות 8.2) ולמשולש פסקל (פעילות 8.3).

1. ניתן להגיע מביתו של דני לביתו של רמי ב- 6 דרכים שונות.



.2 ניתן להגיע מנקודה A לנקודה B ב- 20 דרכים שונות.



.3 ברשת שבילים של 6 x 6 ניתן להגיע מנקודה A לנקודה B ב- 924 דרכים שונות.

כדי להגיע לתשובה יש לבנות רשת משבצות ריבועיות, ולרשום בכל צומת את מספר הדרכים המובילות אליו צעד אחרי צעד, עד שמגיעים בקודקוד B ל- 924.

.4 א. לאחר מילוי מספרי המסלולים ברשת הראשונה, ממשיכים למלא את מספרי המסלולים גם מעבר לגשר, ברשת השנייה.

	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252

252	252	252	252	252
252	504	756	1008	1260
252	756	1512	2520	3780
252	1008	2520	5040	8820
252	1260	3780	8820	17640

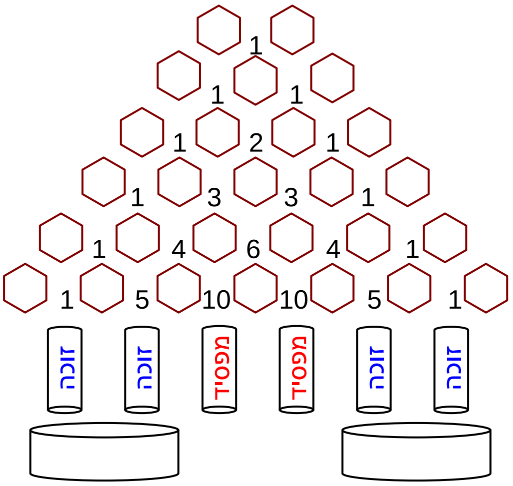
לכן, מספר כל המסלולים מביתה של כיפה אדומה לבית סבתה הוא 17,640.

ייתכן שחלק מהתלמידים ימצאו את מספרי המסלולים לכל רשת בנפרד, כלומר יתחילו ברשת השנייה מ- 1, ויחברו את שתי התוצאות. אפשר להראות לתלמידים אלו (ולכל הכיתה) בסיכום השיעור כי למרות שהדרך שבחרו אינה נכונה, ניתן בכל זאת להשתמש במספר המסלולים של כל רשת בנפרד כדי למצוא את התשובה הנכונה (ראו בסיכום).

ב. אם כיפה אדומה תעבור כל יום במסלול אחר, היא תמצה את כל המסלולים לאחר כ- 48 ($17,640 : 365 \approx$) שנים.

.5 א. המשחק אינו הוגן.

לכל כלי אפשר להגיע דרך 6 מסלולים שונים. לעומת זאת לשני הפתחים האמצעיים המובילים מחוץ לכלי , אפשר להגיע דרך 20 מסלולים שונים.



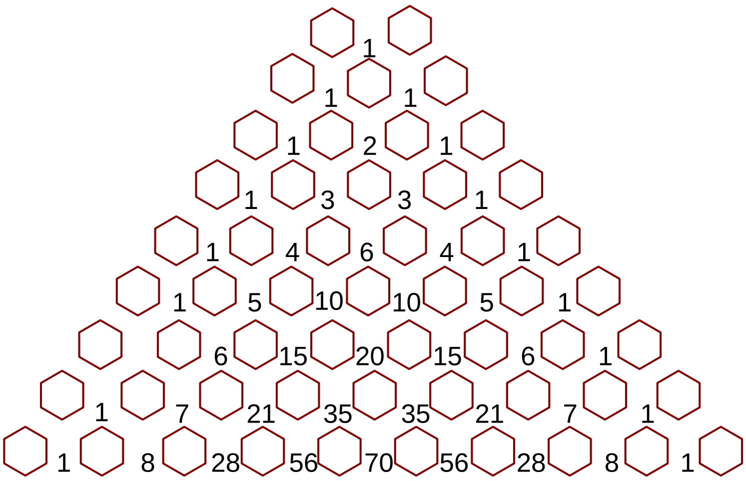
הסיכויים שכדור יגיע לכלי הם $\frac{12}{32}$ מכלל האפשרויות.

הסיכויים שכדור ייפול החוצה הוא $\frac{20}{32}$ מכלל האפשרויות.

לכן הסיכוי להפסד גדול יותר.

ב. אם נציב כלי מתחת לשלושת הפתחים הימניים (או השמאליים), והשלושה האחרים ישארו גלויים המשחק יהיה הוגן, כי אז מכלל כל האפשרויות יהיו 16 אפשרויות לכדור להגיע לכלי, ו- 16 להגיע מחוץ לכלי.

.6 א. יש בסך-הכל 256 (= 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1) מסלולים המובילים מן הפתח העליון אל אחד הפתחים התחתונים.



ב. יש רק מסלול אחד אל הפתח הקיצוני השמאלי (ראו שרטוט).

הסיכוי שכדור ייצא מן המבוך דרך פתח זה הוא $\frac{1}{256}$.

ג. 70 מסלולים מובילים לפתח האמצעי (ראו שרטוט).

הסיכוי שכדור ייצא מן המבוך דרך פתח זה הוא $\frac{70}{256}$.

.7 א. I.

	28		34		21		1
9		19		15		6	
	9		10		5		1
3		6		4		1	
	3		3		1		
1		2		1			
	1		1				
		1					

II.

	14		14		6		1
5		9		5		1	
	5		4		1		
2		3		1			
	2		1				
1		1					
	1						
1							

.III

	7		20		28		1
1		6		14		14	
	1		5		9		5
		1		4		5	
			1		3		2
				1		2	
					1		1
						1	

.IV

	20		35		34		14
5		15		20		14	
	5		10		10		4
1		4		6		4	
	1		3		3		1
		1		2		1	
			1		1		
				1			

ב. ניתן לנוע במספר הדרכים הגדול ביותר – 35 דרכים, בין המשבצת הלבנה השלישית משמאל בשורה התחתונה, לבין המשבצת הלבנה השנייה משמאל בשורה העליונה (ראו לוח IV).

ג. ניתן להגיע מן המשבצת הלבנה הקיצונית השמאלית אל השורה העליונה ב- 35 (= 1 + 6 + 14 + 14) דרכים (ראו לוח II).

ד. ניתן להגיע מן השורה הראשונה אל השורה השמינית ב- 278 (סכום כל המספרים בשורה העליונה) דרכים.

ה. מיכה אינו צודק . ניתן להגיע לשורה הרביעית ב- 24 (סכום המספרים בשורה הרביעית) דרכים. 278 הוא בערך פי 11 מ- 24.

למסיימים

א. כל מסלול המוביל מן המשבצת האמצעית המסומנת ב"ש" אל אחת המשבצות ההיקפיות המסומנות ב"ה" דרך צלעות המשבצות ברשת (ולא דרך קודקודים), יוצר את המילה "שמחה". מצאו כמה פעמים אפשר לקרוא את המילה "שמחה" בכל כיוון אפשרי.

			ה			
		ה	ח	ה		
	ה	ח	מ	ח	ה	
ה	ח	מ	ש	מ	ח	ה
	ה	ח	מ	ח	ה	
		ה	ח	ה		
			ה			

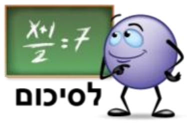
תשובה: 28 פעמים.

$4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 28$

			1			
		3	1	3		
	3	2	1	2	3	
1	1	1	1	1	1	1
	3	2	1	2	3	
		3	1	3		
			1			

ב. בחרו מילה בת יותר מארבע אותיות והכינו רשת דומה לזו שבסעיף א. כמה פעמים אפשר לקרוא את המילה שלכם לכל כיוון אפשרי?

ג. קראו באתר שכתובתו http://aniyehudi.co.il/stories-and-parable/ סיפור על שימוש מתוחכם שעשה ר יהונתן אייבשיץ במבנה דומה.



- מתייחסים למשימות 3 ו- 4. אחרי שהתלמידים בנו את הרשת עבור משימה 3, הם יכולים לראות בתוכה גם רשת של 4 x 4 ושל 5 x 5.

  מספר המסלולים ברשת של 5 x 5 הוא 252.

  מספר המסלולים ברשת של 4 x 4 הוא 70.

  מראים שמספר המסלולים במשימה 4 אינו סכום המסלולים ברשתות של 5 x 5 ושל 4 x 4.

  על כל מסלול שכיפה אדומה הלכה ברשת הראשונה היא יכולה לבחור אחד מ-70 מסלולים שברשת השנייה.

  לכן, מספר כל המסלולים מביתה של כיפה אדומה לבית סבתה הוא **מכפלת** מספרי המסלולים (ולא סכומם), כלומר, 17,640 (= 70 · 252)

- בודקים באילו מן המשימות התשובה התקבלה על-ידי חיבור אפשרויות (משימה 5 ומשימה 7)