

### 7.3 משפט פיתגורס במשולש שווה-שוקיים



- שימוש במשפט פיתגורס לחישובי שטחים והיקפים
- יצירת צורות מורכבות מצורות בסיסיות
- מיצוי אפשרויות
- מציאת הקשר בין אורך אלכסון הריבוע וצלעו
- מציאת הקשר בין אורך היתר של משולש ישראווית ושווה-שוקיים לבין אורך הניצב



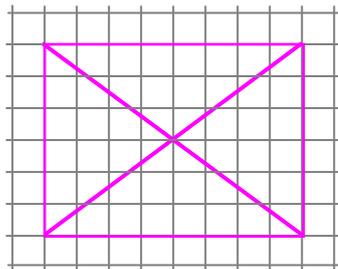
דף משובץ לגזירה ומספריים לכל תלמיד.



עונים על השאלה שבמשימת הפתיחה



1.



2. א. כדי ששטח המשולשים יהיה 12 סמ"ר מכפלת אורך הבסיס בגובה צריכה להיות 24 סמ"ר. כדי ששוקי שני המשולשים יהיו באותו אורך, בכל משולש הגובה לבסיס צריך להיות שווה באורכו למחצית אורך הבסיס של המשולש השני.

משולשים כאלה הם למשל משולשים שאורך בסיסם 2 יחידות וגובהם 12 יחידות, או שאורך צלעם 24 יחידות וגובהם יחידה אחת.

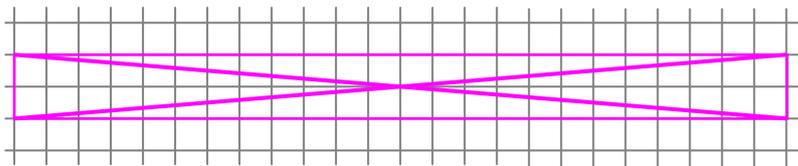
כדי לחשב את אורך השוק נסמן אותה ב-x

$$x^2 = 1^2 + 12^2 = 145$$

$$x = 12.04$$

אורך השוק של שני המשולשים הוא 12.04 סמ"ר

ב. למשל,



כל משבצת מייצגת 1 סמ"ר.

3. א. מלבנים מתאימים הם מלבנים ששטחם 48 סמ"ר ( $= 12 \cdot 4$ ). יש חמישה מלבני פאזל כאלה.

מידותיהם:  $6 \times 8$ ,  $4 \times 12$ ,  $3 \times 16$ ,  $2 \times 24$ ,  $1 \times 48$

ב. התייחסנו במשימות 1 ו-2 לשניים מן המלבנים, וחישבנו את אורך הצלעות המשולשים המרכיבים אותם.

באותו אופן (בעזרת משפט פיתגורס) נחשב את אורך הצלעות של שאר המשולשים.

אורכי צלעות המשולשים		מידות המלבן
48, 24.005, 24.005	1, 24.005, 24.005	$1 \times 48$
12, 12.42, 12.42	2, 12.42, 12.42	$2 \times 24$
16, 8.14, 8.14	3, 8.14, 8.14	$3 \times 16$
12, 6.32, 6.32	4, 6.32, 6.32	$4 \times 12$
8, 5, 5	6, 5, 5	$6 \times 8$

4. א-ב. אורך הניצבים במשולשים ישרי-זווית שוויו השוקיים הנתונים הוא יחידה אחת.

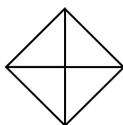
נסמן את אורך היתר במשולשים ב- $x$ .

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

חשוב לציין כי צורת הכתיבה  $a + b\sqrt{2}$  היא צורה מקובלת במתמטיקה ותלמידים ייפגשו בה בהמשך לימודיהם.

נסמן את היקפי המשולשים ב- $H$



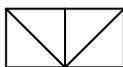
$$H = 4\sqrt{2}$$



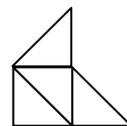
$$H = 4 + 2\sqrt{2}$$



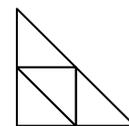
$$H = 4 + 2\sqrt{2}$$



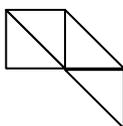
$$H = 6$$



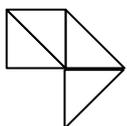
$$H = 4 + 2\sqrt{2}$$



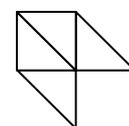
$$H = 4 + 2\sqrt{2}$$



$$H = 4 + 2\sqrt{2}$$



$$H = 4 + 2\sqrt{2}$$



$$H = 4 + 2\sqrt{2}$$

ג. הצורות יוצאות הדופן הן הריבוע והמלבן . בהיקף של הריבוע יש רק יתרים , ובהיקף של המלבן יש רק ניצבים.

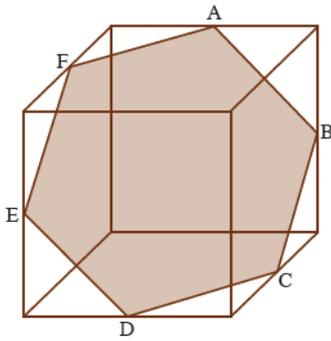
ד. ההיקפים של כל הצורות שיש להם אותו היקף מורכבים מארבעה ניצבים ושני יתרים.

**5.** אם נפריד את ארבעת המשולשים, יהיו להם בסך-הכל 12 צלעות. בכל פעם שמצמידים צלעות, הן אינן מופיעות בהיקף הצורה. מכיוון שהצמדה היא תמיד של שתי צלעות השוות באורכן, נשאר תמיד בהיקף מספר צלעות זוגי מאותו סוג.

**6.**

דוגמאות	ההיקף ביחידות	מספר הצלעות מכל סוג
	8	בהיקף יש רק ניצבים
	$6 + 2\sqrt{2}$	בהיקף יש 6 ניצבים ו- 2 יתרים
	$4 + 2\sqrt{2}$	בהיקף יש 4 ניצבים ו- 2 יתרים
	$4 + 4\sqrt{2}$	בהיקף יש 4 ניצבים ו- 4 יתרים
	$2 + 4\sqrt{2}$	בהיקף יש 2 ניצבים ו- 4 יתרים
	$2 + 6\sqrt{2}$	בהיקף יש 2 ניצבים ו- 6 יתרים
		בהיקף אין ניצבים

7. כל צלע של המשושה היא יתר במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים, שאורך הניצב



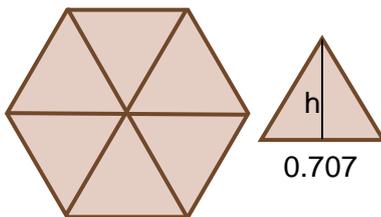
שלו  $\frac{1}{2}$  יחידה.

$$AB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$AB = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$$

היקף המשושה:  $6\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 4.24$  יחידות.

כדי לחשב את שטח המשושה המשוכלל, נשרטט אותו בנפרד, ונחלק אותו לשישה משולשים שווים צלעות. במשולש שווה צלעות, הגובה h לצלע מחלק אותה לשני חלקים שווים. אורך כל חלק 0.35 יחידות.



$$0.35^2 + h^2 = 0.707^2$$

$$h = 0.61$$

שטח המשולש הוא  $0.22 (= \frac{1}{2} \cdot 0.707 \cdot 0.61)$  יחידות שטח,

ושטח המשושה הוא  $1.32 (= 0.22 \cdot 6)$  יחידות שטח.



מריקס על כולר

1. א-ב. ניצור משולשים ישרי-זווית כך שנוכל

למצוא על-פי משפט פיתגורס את אורכי

הצלעות המשופעות

$$AB^2 = 6^2 + 8^2$$

$$AB = 10$$

$$BC^2 = 5^2 + 12^2$$

$$BC = 13$$

$$CD = 5$$

$$DE^2 = 9^2 + 12^2$$

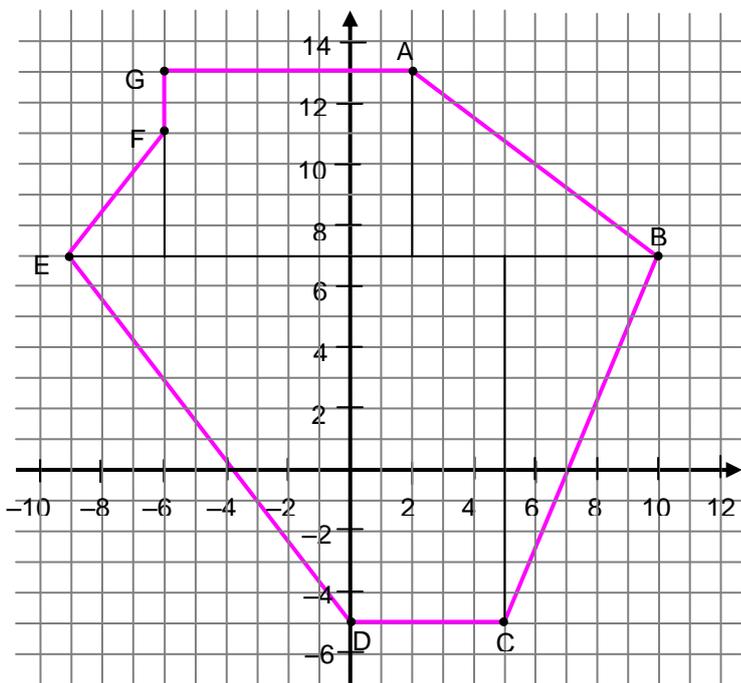
$$DE = 15$$

$$EF^2 = 3^2 + 4^2$$

$$EF = 5$$

$$FG = 2$$

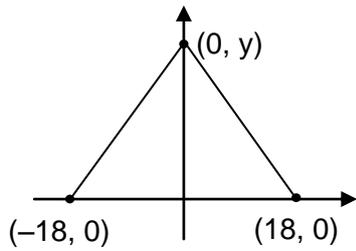
$$GA = 8$$



היקף המשושה הוא:  $58 (= 10 + 13 + 5 + 15 + 5 + 2 + 8)$  יחידות

ג. על-ידי יצירת המשולשים בסעיף ב המשובע מכוסה על-ארבעה משולשים ושני מלבנים

שטחו שווה ל-222  $(= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 + 5 \cdot 12 + 8 \cdot 6)$  יחידות שטח.

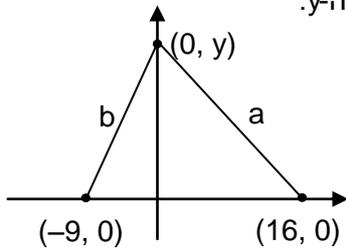


2. אורך בסיסהמשולש 36 יחידות, לכן אורך שוק הוא  $30 (= \frac{96-36}{2})$  יחידות

$$18^2 + y^2 = 30^2$$

$$y = 24$$

קודקוד זווית הראש נמצא בנקוד  $(0, 24)$ , או בנקודה  $(0, -24)$



3. א. אורך צלע המשולש שנמצאת על ציר ה-y היא 25 יחידות הגובה נמצא על ציר ה-y.

נסמן את הגובה ב-h.

$$\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h = 150$$

$$h = 12$$

קודקוד זווית הראש נמצא בנקוד  $(0, 12)$ , או בנקודה  $(0, -12)$

ב. אורך הצלע המונחת על ציר ה-x היא 25 יחידות

על-סמך משפט פיתגורס

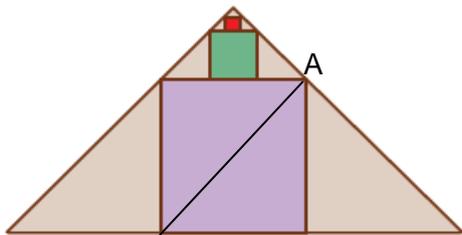
$$a^2 = 12^2 + 16^2 = 400$$

$$a = 20$$

$$b^2 = 12^2 + 9^2 = 225$$

$$b = 15$$

אורכי הצלעות ה-25 יחידות, 20 יחידות ו-15 יחידות



שטח המשולש הגדול מחולק לשתי סדרות אינסופיות שוות של משולשים

שווי-שוקיים ישרי-זווית, ולסדרה אינסופית של ריבועים

בכל שלב בסדרת הריבועים, ניתן לחלק את הריבוע לשני משולשים

החופפים למשולש שהם באותו מקום בסדרת המשולשים

החפיפה היא לפי צלע (משותפת) ושתי זוויות שלידה  $(90^\circ$  ו- $45^\circ)$ .

לכן שטח הריבוע שווה לשטח שני המשולשים בסדרת הריבועים תופסת

חצי משטח המשולש הגדול

1. מצאו דוגמאות נוספות, אם תוכלו, למשימה 6. אם לא תוכלו נסו להסביר מדוע.

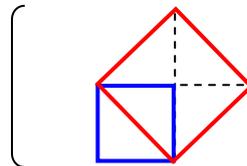
**תשובה:**

אין צורות נוספות שבהיקפן ניצבים בלבד, כי אז כל היתרים צריכים להיות צמודים ונוצרים שלושה ריבועים שלושה ריבועים אפשר להצמיד בשתי דרכים שונות בלבד. בצורות המתומנות אפשר לקבל צורות נוספות על-ידי סיבוב אחד המשולשים שבאחת מהצורות ששורטטו, והצמדתו.

בצורות המשושות אין צורות נוספות. יש יותר צלעות צמודות ולכן פחות אפשרויות

2. שטח הריבוע הבנוי על אלכסונו של ריבוע נתון, גדול פי 2 משטח הריבוע המקורי.

א. הראו בדרך גיאומטרית שהטענה נכונה.



**תשובה:** שטח הריבוע המקורי מורכב משני משולשים חופפים, ושטח הריבוע הבנוי על האלכסון מורכב מארבעה משולשים כאלה.

ב. הוכיחו את הטענה באופן אלגברי.

**תשובה:** נסמן את צלע הריבוע הנתון ב- $a$  ואת האלכסון ב- $d$ . שטח הריבוע הנתון הוא  $a^2$ , ושטח הריבוע הבנוי על האלכסון הוא  $d^2$ . לפי משפט פיתגורס:  $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ .



- דנים בשאלה מה מאפיין משולש שווה-שוקיים בהקשר למשפט פיתגורס.
- משמעות הסימון  $v$  במשבצת היא שהנתון הזה במשולש שווה-שוקיים ידוע. מבררים באילו מן המקרים נצליח למצוא את הנתונים החסרים. מנסים למצוא זוגות נתונים נוספים שבעזרתם ניתן למצוא את האחרים.

	היקף	שטח	אורך גובה לבסיס	אורך השוק	אורך הבסיס	
א.	אפשר			$v$	$v$	
ב.	אפשר		$v$	$v$		
ג.	אפשר	$v$	$v$			
ד.	אי-אפשר*	$v$	$v$			
ה.	אפשר	$v$			$v$	
ו.	אפשר	$v$			$v$	

\*התלמידים טרם למדו לפתור מערכת של 3 משוואות בשלושה משתנים (כאשר אחת המשוואות היא משוואה ריבועית).