7.2 מגדלי פיתגורס – גרסת מחשב

מטרות

- חשיפה למשפט פיתגורס המורחב
- שימוש באלגברה להוכחת משפטים ותכונות גיאומטריים
- שימוש במשפט פיתגורס לחישובי שטח והיקף

אמצעי עזר

ישומונים: מלבנים 1, מלבנים 2, משולשים שווי-שוקיים, משולשים כלשהם
(באתר *מתמטיקה משולבת* – מדור *מצוינות רחובות*)

פתיחה

קוראים במליאה את הטקסט שבמסגרת.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת במשפט פיתגורס המורחב – אם על הצלעות של משולש ישר- זווית בנויות צורות דומות אז שטח הצורה הבנויה על היתר שווה לסכום שטחי הצורות הבנויות על הניצבים. במשימות 1 ו- 2, על צלעותיו של משולש ישר-זווית בנויות צורות דו מות מסוג מסוים (מלבנים או משולשים). בשלב ראשון, התלמידים נעזרים ביישומונים כדי לאשר שאכן משפט פיתגורס המורחב נכון לגבי המקרה הנתון, ובשלב שני הם מוכיחים את המשפט בדרך אלגברית.

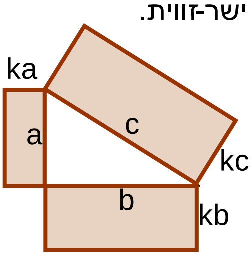
1. א. על-סמך הדוגמאות הרבות הנוצרות על-ידי גרירת השרטוט משערים כי היחס הוא 2 : 1. משערים על-סמך השטחים המתקבלים כי משפט פיתגורס המורחב נכון במקרה זה.

ב. בדומה לסעיף א משערים כי היחס הוא 4 : 3. משערים כי משפט פיתגורס המורחב נכון גם במקרה זה.

ג. משפט פיתגורס נכון עבור כל שלשה של מלבנים דומים הבנויים על צלעות משולש ישר-זווית.

הוכחה: צלע אחת של כל מלבן היא אחת מצלעות המשולש a , b , או c
המלבנים דומים לכן הצלע השנייה בכל מלבן היא ka , kb , או ck בהתאמה.

צ"ל: $aka + bkb = ckc$



$aka + bkb =$

$ka^2 + kb^2 =$

$k(a^2 + b^2) =$

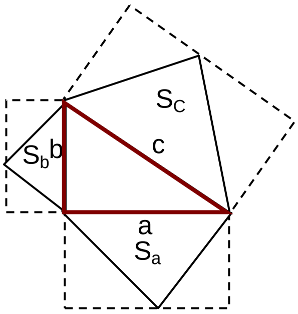
$kc^2 =$ על-סמך משפט פיתגורס

ckc

2. א. על-סמך הדוגמאו ת הרבות הנוצרות על- ידי גרירת השרטוט משערים כי משפט פיתגורס המורחב נכון במקרה זה.

ב. על-סמך הדוגמאות הרבות הנוצרות על- ידי גרירת השרטוט משערים כי משפט פיתגורס המורחב נכון במקרה זה.

ג. משפט פיתגורס המורחב נכון עבור כל שלשה משולשים דומים הבנויים על הניצבים,



הוכחה: נשלים את המשולשים למלבנים.

צלעותיו של כל מלבן הן צלע וגובה של המשולש שאותו הוא השלים. הגבהים במשולשים הדומים מתייחסים זה לזה ביחס הצלעות המתאימות, לכן גם המלבנים דומים. שטח כל משולש הבנוי על צלעות המשולש ישר- הזווית הוא מחצית משטח המלבן המתאים.

לפי המשימה הקודמת, משפט פיתגורס המורחב נכון עבור שטחי המלבנים. לכן המשפט יתקיים גם עבור השטחים של משולשים דומים (ששטחם מחצית משטחי המלבנים).

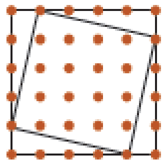
ד. כאשר שטח המשולש הבנוי על ניצב הוא רבע משטח המשולש הבנוי על היתר, אז שטח המשולש הראשון הוא שליש משטח המשולש הבנוי על הניצב השני.

$$S_a = \frac{1}{4}S_c = \frac{1}{4}(S_a + S_b)$$
$$S_a - \frac{1}{4}S_a = \frac{1}{4}S_b$$
$$\frac{3}{4}S_a = \frac{1}{4}S_b$$
$$S_a = \frac{1}{3}S_b$$

כאשר שטח המשולש הבנוי על ניצב הוא רבע משטח המשולש הבנוי על הניצב השני, אז שטח המשולש הראשון הוא חמישית משטח המשולש הבנוי על היתר.

$$S_a = \frac{1}{4}S_b \qquad S_b = 4S_a$$
$$S_c = S_a + S_b$$
$$S_c = S_a + 4S_a = 5S_a$$
$$S_a = \frac{1}{5}S_c$$

3. השרטוט אמור להתבסס על משפט פיתגורס המורחב. יש לעודד את התלמידים לשרטט על הניצבים צורות יצירתיות, ולברר אם הצורות ששרטטו דומות. חשוב שהתלמידים יסבירו כי שלוש הצורות ששרטטו על צלעות המשולש אכן דומות.



1. באמצעות משפט פיתגורס

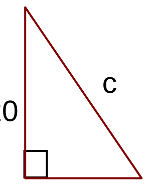
הריבוע הפנימי הוא הריבוע הבנוי על היתר של אחד המשולשים שבשולי הדף. לכן שטח הריבוע הפנימי שווה לסכום שטחי הריבועים שעל ניצבי המשולש שהוא 17 יחידות שטח $(4^2 + 1^2 =)$

ללא שימוש במשפט פיתגורס

שטח הריבוע הפנימי יתקבל אם נחסר את שטחי ארבעת המשולשים משטח הריבוע החיצוני

$$5^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 17$$

2. א. אורך היתר c במשולש:



$c^2 = 20^2 + 15^2 = 625$

$c = 25$

אורך היתר 25 ס"מ.

היקף המשולש 60 ס"מ $(= 20 + 15 + 25)$.

שטח המשולש 150 סמ"ר $(= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15)$

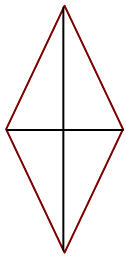
ב. לפי הסעיף הקודם, אורך היתר הוא 25 ס"מ, ושטח המשולש הוא 150 סמ"ר. נסמן את הגובה ליתר ב- h.

$$\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h = 150$$

$h = 12$

אורך הגובה ליתר הוא 12 ס"מ.

3. האלכסונים מחלקים את המעוין לארבעה משולשים חופפים שאורכי ניצביהם 5 ס"מ ו- 12 ס"מ.



נסמן את אורך צלע המעוין ב- a.

$a^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

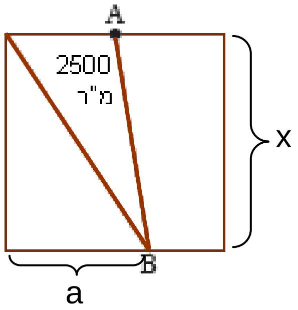
$a = 13$

היקף המעוין 52 ס"מ $(= 4 \cdot 13)$

שטח המעוין הוא 4 פעמים שטח של משולש קטן. השטח הוא 120 סמ"ר $(= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12)$

חידה

x מייצג את אורך צלע החלקה במטרים.



בחלקה המשולשת של הבן הצעיר אחת הצלעות היא $\frac{1}{2}x$, והגובה אליה הוא x.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x\cdot x=2{,}500$$

$$x^2 = 10{,}000$$

שטח החלקה 10,000 מ"ר.

אורך צלע החלקה 100 מטר.

שטח החלק של כל אחד מבין הבנים הגדולים הוא 3,750 מ"ר ($=\frac{10{,}000-2{,}500}{2}$)

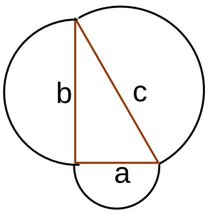
נסמן את חלק הצלע מהקצה השמאלי התחתון עד הנקודה B ב- a (ראו שרטוט)

$$3{,}750=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot a$$

$$a = 75$$

הנקודה B נמצאת במרחק 75 מ' מקודקוד הריבוע שהוא גם קודקוד של החלקה המשולשת של אחד האחים התאומים.

למסיימים



1. על צלעות משולש ישר-זווית בונים חצאי מעגלים כך שכל צלע היא הקוטר של חצי המעגל המתאים.

הוכיחו כי משפט פיתגורס המורחב מתקיים גם לגבי המקרה הזה.

תשובה: הרדיוס של חצי המעגל הבנוי על הצלע a הוא $\frac{a}{2}$.

לכן שטח חצי עיגול זה הוא $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{a}{2})^2=\frac{\pi a^2}{8}$

כדי להוכיח שמשפט פיתגורס המורחב מתקיים עבור מקרה זה, צריך להוכיח:

$$\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}=\frac{\pi c^2}{8}$$

הוכחה:

$$\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}=$$

$$\frac{\pi}{8}(a^2+b^2)=$$

$$\frac{\pi}{8}c^2$$

2. א. - שרטטו מערכת צירים – ראשית הצירים במרכז.

- סמנו במערכת הצירים את הנקודה (4, 3). חשבו את מרחק הנקודה שסימנתם מראשית הצירים (ביחידות של מערכת הצירים).
- מצאו לפחות שיעורים של 14 נקודות נוספות שיש להם אותו מרחק מראשית הצירים וסמנו אותן במערכת הצירים. מהי הצורה המתקבלת? הסבירו.

תשובה:

הנקודות הן:

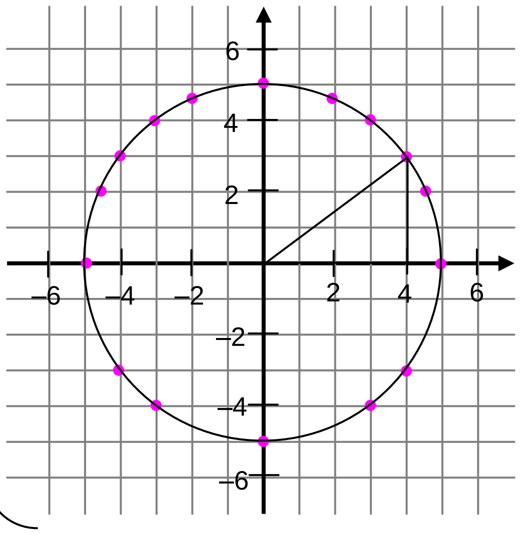
(3, 4) , (–3, 4) , (3, –4) , (–3, –4)

(4, 3) , (–4, 3) , (4, –3) , (–4, –3)

(5, 0) , (–5, 0) , (0, 5) , (0, –5)

(2, 4.6) , (4.6, 2) , (–2, 4.6) , (4.6, –2)

מתקבלת צורת מעגל כי כל הנקודות מרוחקות מרחק שווה מראשית הצירים.



ב. הסבירו לחבר כיצד מצאתם את הנקודות.

תשובה: ארבע נקודות נמצאות על הצירים . עבור יתר הנקודות יש למצוא משולשים ישרי זווית שאורך היתר שלהם 5 יחידות. הנקודות הראשונות נמצאו על-סמך הסימטריה. את המשולש שניצביו 3 יחידות ו- 4 יחידות ויתרו 5 יחידות, ניתן להפוך ולסובב ולקבל 7 נקודות נוספות (פרט לנקודה הנתונה). הנקודות הנוספות יתקבלו בעזרת משפט פיתגורס. נבחר מספר בין 5– ל- 5 נציב אותו בשוויון $x^2 + y^2 = 25$ במקום x או במקום y, ועל-ידי פתרון משוואה נקבל את השיעור השני של הנקודה המבוקשת . בתשובה לסעיף א הצבנו 2 במקום x, וקיבלנו $y = 4.6$. שאר הנקודות התקבלו על-סמך שיקולי הסימטריה.

לסיכום

- משווים הצעות שונות למשימה 4 (עיצוב הבריכות).

  לגבי כל הצעה, מוצאים כי אכן שלוש הצורות דומות זו לזו.

  זוהי הזדמנות לחזור על מושג הדמיון.
- מתייחסים לכך שבהוכחות בגיאומטריה רצוי להתבסס על הוכחות קודמות (ההוכחה במשימה 2 מתבססת על זאת שבמשימה 1), ואין צורך בכל פעם להוכיח מהתחלה.