יחידה 7: משפט פיתגורס

7.1 מגדלי פיתגורס – ללא מחשב

מטרות

- חשיפה למשפט פיתגורס המורחב
- שימוש באלגברה להוכחת משפטים ותכונות גיאומטריים
- שימוש במשפט פיתגורס לחישובי שטח והיקף

אמצעי עזר

אין

פתיחה

קוראים במליאה את הטקסט שבמסגרת.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת במשפט פיתגורס המורחב – אם על צלעות של משולש ישר- זווית בנויות צורות דומות אז שטח הצורה הבנויה על היתר שווה לסכום שטחי הצורות הבנויות על הניצבים. ההוכחות דורשות שימוש בטכניקה אלגברית שהתלמידים עדיין לא למדו, אבל הם יכולים לעקוף אותה. למשל במקום שימוש בכלל $(ab)^2 = a^2b^2$, הם יכולים להשתמש בכפל ביטויים $(ab)^2 = (ab)(ab) = a^2b^2$.

1. א. בשני השרטוטים המלבנים דומים כי כל זוויותיהם שוות (90^0) והיחסים בין הצלעות המתאימות שווים.

בשרטוט הימני היחס הוא $1 : 2$ $(= 2 : 4 = 1.5 : 3 = 2.5 : 5)$.

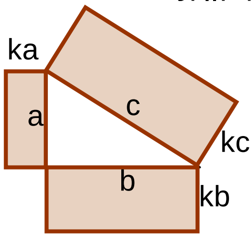
בשרטוט השמאלי היחס הוא $3 : 4$ $(= 4.5 : 6 = 6 : 8 = 7.5 : 10)$.

ב. משפט פיתגורס המורחב נכון בשני המקרים. שטח המלבן הבנוי על היתר שווה לסכום שטחי המלבנים הבנויים על הניצבים.

בשרטוט הימני $2.5 \cdot 5 = 1.5 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ בשרטוט השמאלי $7.5 \cdot 10 = 6 \cdot 8 + 4.5 \cdot 6$

$12.5 = 4.5 + 8$ $75 = 48 + 27$

ג. משפט פיתגורס נכון עבור כל שלושה מלבנים דומים הבנויים על צלעות משולש ישר זווית



הוכחה: צלע אחת של כל מלבן היא אחת מצלעות המשולש a , b , או c

המלבנים דומים לכן הצלע השנייה בכל מלבן היא ka , kb , או ck בהתאמה.

צ"ל: aka + bkb = ckc

aka + bkb =

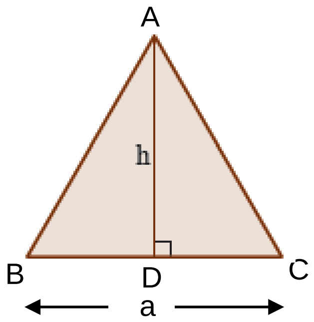
$ka^2 + kb^2 =$

$k(a^2 + b^2) =$

$kc^2 =$ על-סמך משפט פיתגורס

ckc

2. א. במשולש ABC: AD הוא גובה, לכן משולש ABD הוא ישר זווית.



AD הוא גם תיכון, לכן $DC = \frac{1}{2}a$

לפי משפט פיתגורס במשולש ABD:

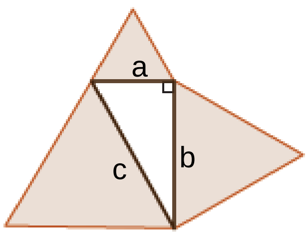
$$(\frac{1}{2}a)^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ב. המשולשים דומים כי כל זוויותיהם שוות (60^0) והיחס בין הצלעות שווה כי הצלעות שוות בכל משולש.



ג. משפט פיתגורס נכון עבור כל שלושה משולשים שווי צלעות הבנויים על צלעות משולש ישר זווית.

הוכחה: לפי סעיף א, אפשר להביע את הגובה לצלע במשולש שווה-צלעות באמצעות הצלע. השטח של משולש שווה-צלעות שצלעו a הוא: $\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

כדי להראות שמשפט פיתגורס המורחב מתקיים עבור משולשים שווי-צלעות, צריך להוכיח:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

הוכחה:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} =$$

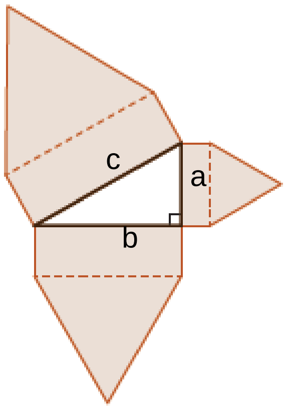
$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

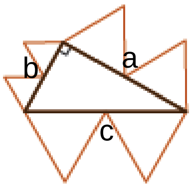
3. א. **הוכחה**: על-סמך משימה 1, שטח המלבן הבנוי על היתר שווה לסכום שטחי המלבנים הבנויים על הניצבים.

על-סמך משימה 2, שטח המשולש שווה- הצלעות הבנוי על היתר שווה לסכום שטחי המשולשים שווי-הצלעות הבנויים על הניצבים.

לכן המשפט נכון גם לסכום שטחי הצורות.



ב. **הוכחה**: אורך הצלע של משולש שווה-צלעות אחד מבין השניים שמונחים על הניצב a הוא $\frac{1}{2}a$.



לכן שטחו (על-סמך משימה 2א): $\frac{(\frac{1}{2}a)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$

זה מתאים גם למשפט שאומר שאם מקטינים את צלע המשולש פי 2 שטחו קטן פי 4 (ראו גם פעילות 6.3 שמיכות טלאים)

כדי להראות שמשפט פיתגורס המורחב מתקיים עבור מקרה זה, צריך להוכיח:

$$2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{16}+2\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{16}=2\cdot\frac{c^2\sqrt{3}}{16}$$

הוכחה:

$$2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{16}+2\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{16}=$$

$$\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{8}+\frac{b^2\sqrt{3}}{8}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}(a^2+b^2)=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}c^2$$

ג. ההוכחה עבור שלושה משולשים על כל צלע דומה להוכחה עבור שני משולשים על כל צלע שבסעיף הקודם

ד. כדי להראות שמשפט פיתגורס המורחב מתקיים עבור מקרה זה, צריך להוכיח:

$$6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+6\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=6\cdot\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

הוכחה:

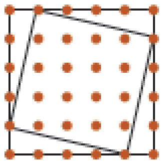
$$6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+6\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=$$

$$3\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{2}=$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2)=$$

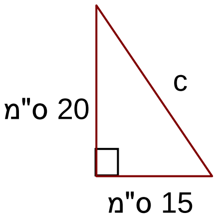
$$\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

4. השרטוט אמור להתבסס על משפט פיתגורס המורחב . יש לעודד את התלמידים לשרטט על הניצבים צורות יצירתיות, ולברר אם הצורות ששרטטו דומות . חשוב שהתלמידים יסבירו כי שלוש הצורות ששרטטו על צלעות המשולש אכן דומות.



1. באמצעות משפט פיתגורס
הריבוע הפנימי הוא הריבוע הבנוי על היתר של אחד המשולשים שבשולי הריבוע. לכן שטח הריבוע הפנימי שווה לסכום שטחי הריבועים שעל ניצבי המשולש שהוא ($4^2 + 1^2 =$) 17 יחידות שטח
ללא שימוש במשפט פיתגורס
שטח הריבוע הפנימי יתקבל אם נחסר את שטחי ארבעת המשולשים משטח הריבוע החיצוני

$$5^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 17$$



2. א. אורך היתר c במשולש:

$c^2 = 20^2 + 15^2 = 625$

$c = 25$

אורך היתר 25 ס"מ.

היקף המשולש 60 ס"מ (= 25 + 15 + 20).

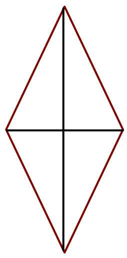
שטח המשולש 150 סמ"ר ($= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15$)

ב. לפי הסעיף הקודם, אורך היתר הוא 25 ס"מ, ושטח המשולש הוא 150 סמ"ר. נסמן את הגובה ליתר ב- h.

$$\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h = 150$$

$h = 12$

אורך הגובה ליתר הוא 12 ס"מ.



3. האלכסונים מחלקים את המעוין לארבעה משולשים חופפים שאורכי ניצביהם 5 ס"מ ו- 12 ס"מ.
נסמן את אורך צלע המעוין ב- a.

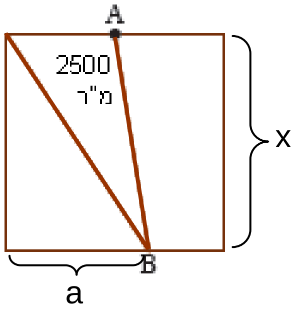
$a^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$a = 13$

היקף המעוין 52 ס"מ ($4 \cdot 13 =$)

שטח המעוין הוא 4 פעמים שטח של משולש קטן. השטח הוא 120 סמ"ר ($= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12$)

חידה



x מייצג את אורך צלע החלקה במטרים.

בחלקה המשולשת של הבן הצעיר אחת הצלעות היא $\frac{1}{2}x$, והגובה אליה הוא x.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x\cdot x=2{,}500$$

$$x^2 = 10{,}000$$

שטח החלקה 10,000 מ"ר.

אורך צלע החלקה 100 מטר.

שטח החלק של כל אחד מבין הבנים הגדולים הוא 3,750 מ"ר $(=\frac{10{,}000-2{,}500}{2})$

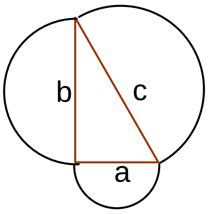
נסמן את חלק הצלע מהקצה השמאלי התחתון עד הנקודה B ב- a (ראו שרטוט)

$$3{,}750=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot a$$

$$a = 75$$

הנקודה B נמצאת במרחק 75 מ' מקודקוד הריבוע שהוא גם קודקוד של החלקה המשולשת של אחד האחים התאומים.

למסיימים



1. על צלעות משולש ישר-זווית בונים חצאי מעגלים כך שכל צלע היא הקוטר של חצי המעגל המתאים.

הוכיחו כי משפט פיתגורס המורחב מתקיים גם לגבי המקרה הזה.

תשובה: הרדיוס של חצי המעגל הבנוי על הצלע a הוא $\frac{a}{2}$.

לכן שטח חצי עיגול זה הוא $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{a}{2})^2=\frac{\pi a^2}{8}$

כדי להוכיח שמשפט פיתגורס המורחב מתקיים עבור מקרה זה, צריך להוכיח:

$$\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}=\frac{\pi c^2}{8}$$

הוכחה:

$$\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}=$$

$$\frac{\pi}{8}(a^2+b^2)=$$

$$\frac{\pi}{8}c^2$$

2. א. - שרטטו מערכת צירים – ראשית הצירים במרכז.

- סמנו במערכת הצירים את הנקודה (4, 3). חשבו את מרחק הנקודה שסימנתם מראשית הצירים (ביחידות של מערכת הצירים).
- מצאו לפחות שיעורים של 14 נקודות נוספות שיש להם אותו מרחק מראשית הצירים וסמנו אותן במערכת הצירים. מהי הצורה המתקבלת? הסבירו.

תשובה:

הנקודות הן:

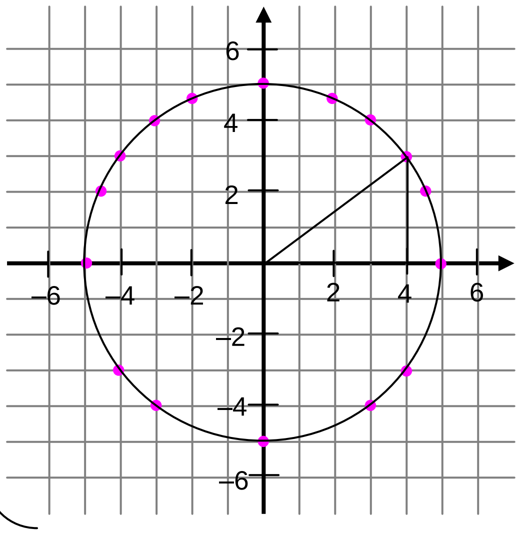
(3, 4) , (–3, 4) , (3, –4) , (–3, –4)

(4, 3) , (–4, 3) , (4, –3) , (–4, –3)

(5, 0) , (–5, 0) , (0, 5) , (0, –5)

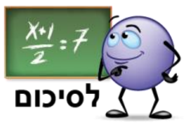
(2, 4.6) , (4.6, 2) , (–2, 4.6) , (4.6, –2)

מתקבלת צורת מעגל כי כל הנקודות מרוחקות מרחק שווה מראשית הצירים.



ב. הסבירו לחבר כיצד מצאתם את הנקודות.

תשובה: ארבע נקודות נמצאות על הצירים . עבור יתר הנקודות יש למצוא משולשים ישרי זווית שאורך היתר שלהם 5 יחידות. הנקודות הראשונות נמצאו על-סמך הסימטריה. את המשולש שניצביו 3 יחידות ו- 4 יחידות ויתרו 5 יחידות, ניתן להפוך ולסובב ולקבל 7 נקודות נוספות (פרט לנקודה הנתונה). הנקודות הנוספות יתקבלו בעזרת משפט פיתגורס. נבחר מספר בין –5 ל- 5 נציב אותו בשוויון $x^2 + y^2 = 25$ במקום x או במקום y, ועל-ידי פתרון משוואה נקבל את השיעור השני של הנקודה המבוקשת . בתשובה לסעיף א הצבנו 2 במקום x, וקיבלנו y = 4.6. שאר הנקודות התקבלו על-סמך שיקולי הסימטריה.



לסיכום

משווים הצעות שונות למשימה 4 (עיצוב הבריכות).

לגבי כל הצעה, מוצאים כי אכן שלוש הצורות דומות זו לזו.

זוהי הזדמנות לחזור על מושג הדמיון.