6.5 אוסף בעיות בגיאומטריה

מטרות

- סיכום החומר הנלמד בגיאומטריה – חזרה על חישובי זוויות, משולשים חופפים ודומים, משולשים שווי-שוקיים ותכונותיהם, שטחים והיקפים.
- התייחסות לטענה שאפשר לפתח ולהרחיב אותה לכיוונים שונים
- גילוי והוכחת תכונות במשולשים במרובעים ובמעגלים

אמצעי עזר

אין

פתיחה

עונים במליאה על משימה 1, ומבהירים את הקשר בין המשפט הידוע – במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות, ובין המשפט שבמשימה זו, שהם משפטים הפוכים זה לזה.

פתרונות והערות

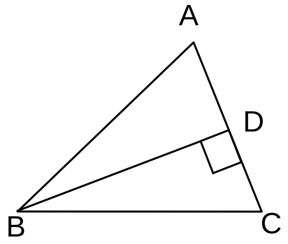
בפעילות אוסף הכולל **שלושה מקבצים של משימות**. המקבצים אינם קשורים זה לזה, ובמהלך שיעור אחד אפשר לבחור לעבוד רק על חלק מהמקבצים. לעומת זאת, המשימות בכל מקבץ קשורות זו לזו, באופן שנוצרת התפתחות. חשוב לעודד את התלמידים להתייחס להתפתחות זו, כלומר, להשתמש בממצאים שהם מוצאים בכל משימה כדי לפתור את המשימות הבאות.

מקבץ המשימות הראשון מתייחס למקבילית בה חוצי-זוויות סמוכות נפגשות על הצלע שממול. במקרה כזה נוצרים שלושה משולשים – משולש ישר-זווית, ושני משולשים שווי-שוקיים, השווים באורכי שוקיהם. לכן, חוצי-זוויות המקבילית נפגשים באמצע הצלע שממול. המצב הזה מזמן שאלות רבות.

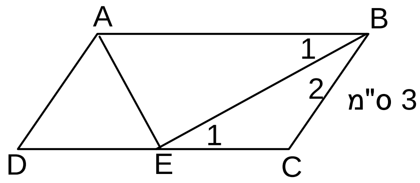
מקבץ המשימות השני מתייחס למצולע החסום במעגל, באופן שאחת מצלעותיו היא קוטר, ושאר צלעותיו שוות זו לזו. כדי למצוא את זוויות המצולעים החסומים, ובמקרים מיוחדים גם את אורכי הצלעות, אנו מציעים בהדרכה להעביר רדיוסים מקודקודי המצולעים, וליצור משולשים שווי-שוקיים חופפים. דרך נוספת למצוא את הזוויות היא להעתיק את המצולע כתמונת ראי לצידו השני של הקוטר, לקבל מצולע משוכלל, ולחשב את זוויותיו.

מקבץ המשימות השלישי מתייחס ליצירת משולשים דומים על-ידי העברת מקבילים לאחת מצלעות המשולש. מתייחסים למשפט לגבי היחס בין שטחים של משולשים דומים לא רק בדרך חישובית, אלא גם בדרך גיאומטרית – ריצוף השטח של המשולש הגדול באמצעות המשולשים הקטנים.

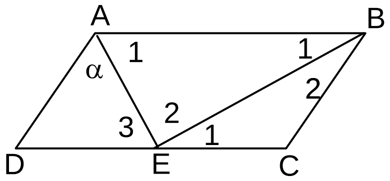
1. נתון כי זוויות A ו- C שוות. מורידים גובה לצלע AC, ויוצרים שני משולשים ישרי-זווית השווים בזוויותיהם.
שני המשולשים שווים גם בצלע BD, ולכן הם חופפים.
BA = BC (צלעות מתאימות במשולשים חופפים)



2. $\angle B_1 = \angle B_2$ (BE חוצה זווית)
$\angle B_1 = \angle E_1$ (זוויות מתחלפות בין המקבילים AB ו- DC
ולכן, $\angle B_2 = \angle E_1$
לכן, לפי סעיף א 3 ס"מ = CB = CE .
3 ס"מ = AD = BC
באותה דרך נראה ש- 3 ס"מ = DE
היקף המקבילית הוא 18 ס"מ (= $2 \cdot 6 + 2 \cdot 3$)



3. א. במקבילית שני זוגות של זוויות נגדיות שוות. סכום הזוויות הפנימיות במקבילית הוא 360^0, לכן סכום זוויות סמוכות הוא 180^0 ($\frac{1}{2} \cdot 360^0 =$)



ב. $\angle A_1 = \alpha$

$\angle E_3 = \alpha$

$\angle DAB = \angle C = 2\alpha$

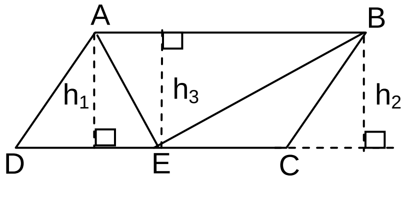
$\angle D = \angle ABC = 180^0 - 2\alpha$

$\angle B_1 = \angle B_2 = \angle E_1 = 90^0 - \alpha$

$\angle E_2 = 180 - (\angle E_1 + E_3) = 90^0$

ג. 8 ס"מ = EB , 6 ס"מ = AE

לפי משימות 1ב ו- 2ב, ΔADE ו- ΔBCE הם שווי-שוקיים, ו- ΔAEB הוא ישר-זווית. בעזרת משפט פיתגורס נמצא כי 10 ס"מ = AB.
10 ס"מ = DC = AB
5 ס"מ = DE = AD = BC = EC



2

היקפים
היקף ΔADE הוא 16 ס"מ (= 6 + 5 + 5)
היקף ΔBEC הוא 18 ס"מ (= 8 + 5 + 5)
היקף ΔAEB הוא 24 ס"מ (= 10 + 8 + 6)

שטחים
משולש AEB הוא כאמור ישר זווית, לכן שטחו שווה למחצית מכפלת הניצבים 24 סמ"ר (= $0.5 \cdot 6 \cdot 8$)
$DE = EC = \frac{1}{2}AB$ (לפי סעיפים קודמים)
$h_1 = h_2 = h_3$ (מרחקים בין מקבילים)

לכן, שטח כל משולש צדדי הוא מחצית משטח המשולש האמצעי, כלומר 12 סמ"ר.
אפשרות נוספת לחישוב שטחי המשולשים הצדדיים היא בעזרת משפט פיתגורס , בהסתמך על ה משפט שבמשולש שווה-שוקיים הגובה הוא גם תיכון. הגובה לבסיס במשולש אחד הוא 3cm ובמשולש השני 4cm.

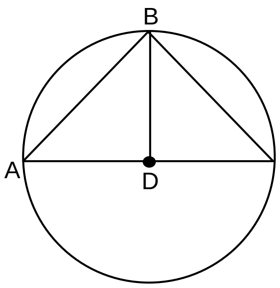
4. א. כבר ראינו במשימות הקודמות כי הנקודה E מחלקת את הצלע לשני חלקים שווים.
המקביל EF מחלק את המקבילית לשתי מקביליות, כי למרובעים אלו יש שני זוגות צלעות מקבילות

$$\frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB = EC = FB$$

לכן F היא אמצע הצלע AB

ב. לפי המשימות הקודמות ההיקף של כל אחד מהמרובעים הוא 20 ס"מ ($=5 \cdot 4$)

5. א. נתון כי AB = AC.



נעביר רדיוס מ- B למרכז הבסיס.
הרדיוס הוא תיכון ולכן הוא גם גובה.
שני המשולשים שנוצרו הם שווי שוקיים (רדיוסים) וישרי זווית (BD הוא גובה) .
לכן, זוויות הבסיס של משולשים אלה הן בנות 45^0.
הזווית B מורכבת משתי זוויות כאלה לכן היא ישרה.
במשולש ABC: $<A = <C = 45^0$, $<B = 90^0$

ב. שטח המשולש הוא מחצית מכפלת הניצבים – 50 סמ"ר.

ג. **דרך א**
לפי משפט פיתגורס במשולש ABC : $AC^2 = 200$ ($= 10^2 + 10^2$)
אורך הקוטר הוא $\sqrt{200}$
דרך ב
נייצג את שטח המשולש על פי היתר והגובה אליו, ונשווה לשטח שמצאנו בסעיף ב.

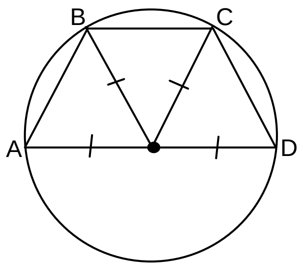
$$\frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = 50$$

$$R^2 = 50$$

$$R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AC = 2R = 10\sqrt{2}$$

6. א. נעביר רדיוסים. נוצרו שלושה משולשים שווי-שוקיים חופפים (צ.צ.צ).



לכן, זוויות הראש שווה.

כל זווית ראש היא בת 60^0 (= 3 : 180). לפי חישובי זוויות, כל הזוויות של כל משולש שווה ל- 60^0.

במרובע ABCD: $<A = <D = 60^0$, $<B = <C = 120^0$.

ב. לפי סעיף א, הזוויות של כל משולש הן 60^0.

לכן, שלושת המשולשים הם שווי-צלעות, וכל אחת מצלעות המשולשים שווה באורכה לאורך הרדיוס.

היקף המרובע מורכב מ- 5 קטעים באורך הרדיוס.

$5R = 30$

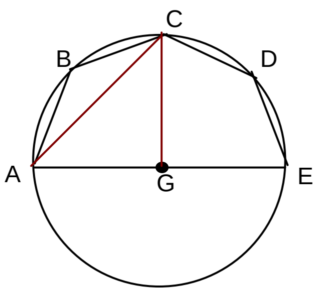
לכן אורך הרדיוס הוא 6 ס"מ, ואורך הקוטר 12 ס"מ.

7. א. נעביר רדיוסים. נוצרו ארבעה משולשים שווי-שוקיים חופפים (צ.צ.צ).

זוויות הראש של משולשים אלה שוות, וגודלן 45^0 (= 4 : 180).

על-פי חישובי זוויות, בכל משולש זוויות הבסיס הן בנות 67.5^0.

לכן, במחומש ABCDE: $<A = <E = 67.5^0$, $<B = <C = <D = 135^0$



ב. **אפשרות א**

נסמן את מרכז המעגל ב- G. משולש ACG הוא שווה-שוקיים ולפי חישובי זוויות הוא גם ישר-זווית.

בעזרת משפט פיתגורס במשולש ACG:

$R^2 + R^2 = 25$

$2R^2 = 25$

לכן $R^2 = 12.5$

$R = \sqrt{12.5}$

ואורך הקוטר $2 \cdot \sqrt{12.5}$

אפשרות ב

כפי שראינו במשימה 5 ΔACE הוא שווה-שוקיים וישר-זווית.

לפי משפט פיתגורס: $AE^2 = 50$ (= $5^2 + 5^2$).

אורך הקוטר $\sqrt{50}$ ס"מ.

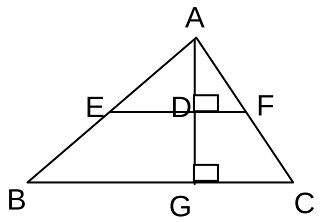
8. יתכנו תשובות שונות. יש לשער שהתלמידים ישאלו על זוויות המשובע

9. א. שני המשולשים שווים בשלוש זוויות כי המקביל יוצר שני זוגות של זוויות מתאימות שוות, והזווית השלישית משותפת.

לכן שני המשולשים דומים.

ב. מכיוון ש- AE = EB היחס בין הצלעות המתאימות בשני המשולשים הוא 2 : 1.

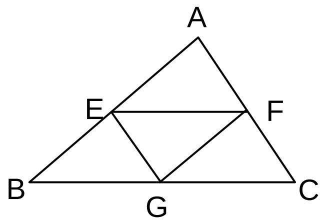
ג. מורידים גובה לאחד המקבילים . הגובה הוא אנך גם למקביל השני .
הגובה יוצר ארבעה משולשים.
נתבונן למשל, בשני המשולשים השמאליים . יש להם שני זוגות של
זוויות שוות והזווית השלישית משותפת.
לכן המשולשים דומים. לכן היחס בין צלעותיהם הוא כיחס הדמיון: 2 : 1.
לכן היחס בין גבהי המשולשים AEF ו- ABC הוא 2 : 1.



ד. נסמן את הצלעות EF ו- BC של המשולשים הדומים ב- a_1 ו- a_2, את הגבהים לצלעות אלו ב- h_1 ו- h_2,
ואת השטחים שלהם ב- S_1 ו- S_2 בהתאמה.

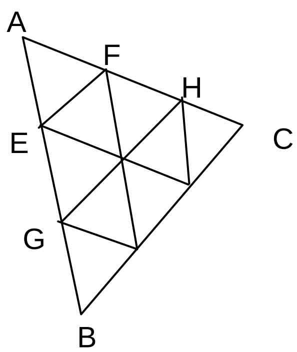
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}a_1h_1}{\frac{1}{2}a_2h_2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{h_1}{h_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ה. כפי שראינו בסעיף א, כל מקביל חותך מן המשולש משולש דומה לו כאשר
יחס הדמיון הוא 2 : 1. לכן המקבילים לצלעות חייבים להגיע לאמצע הצלע
BC.
המשולש הפנימי חופף לכל אחד מהמשולשים האחרים לפי צלע
(משותפת) ושתי זוויות שלידה (מתחלפות בין מקבילים), ולכן כל
המשולשים חופפים.

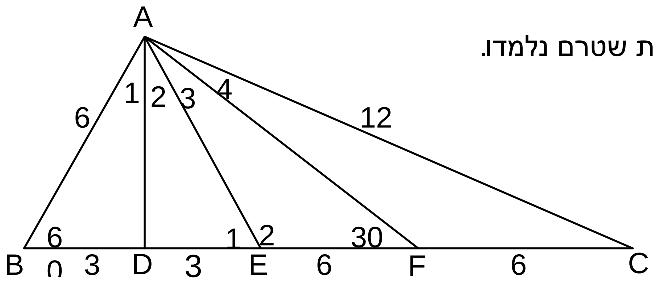


אפשר לראות בשרטוט ששטח המשולש AEF הוא אכן רבע משטח המשולש ABC הדומה לו, כפי שהוכחנו
בסעיף ד.

10. א. אותה הוכחה כמו במשימה 8 סעיף א.
ב. היחס בין הצלעות המתאימות הוא 3 : 1.
ג. היחס בין הגבהים הוא כיחס הדמיון 3 : 1. (ראו הוכחה במשימה 9ג).
ד. היחס בין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}a_1h_1}{\frac{1}{2}a_2h_2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{h_1}{h_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
ה. אפשר לראות שהמשולש הגדול מכיל 9 משולשים קטנים.
כלומר, היחס בין משולש הקטן לגדול הוא $\frac{1}{9}$.



11. ייתכנו תשובות שונות.



א. בנתונים יש סתירות רבות – חלקן מתבססות על תכונות שטרם נלמדו.

נציין שלושה דברים שלא ייתכנו.

(i) במשולש ABF: $\angle A_1 + A_1 + A_1 = 90^0$

לפי הנתון, ארבעת החלקים של זווית A שווים.

לכן, $<A_1 = <A_2 = <A_3 = 30^0$

וגם $A_4 = 30^0$

לכן, $<A_1 + <A_2 + <A_3 + A_4 = 120^0$

לפי הנתונים שבבעיה, במשולש ABC $\angle B + \angle BAC = 180^0$.

דבר זה לא ייתכן.

(ii) במשולש AFC: $\angle AFC + \angle FAC = 180^0$, וגם דבר זה לא ייתכן.

(iii) במשולש ABE: המשולש הוא שווה-שוקיים: BA = BE = 6.

לכן זוויות הבסיס שוות.

זווית הראש במשולש זה היא בת 60^0.

לכן $<A_1 + <A_2 = <E_1 = 60^0$, והמשולש ABE הוא שווה-צלעות.

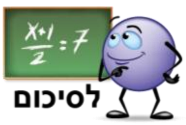
לכן התיכון AD הוא גם גובה.

לכן במשולש ADC $<ADC = <DAC = 90^0$, ודבר זה לא ייתכן.

ב. הסיבה לכל הסתירות נעוצה בכך שעל-סמך הנתונים הקטעים AC ו- BC צריכים להיות מקבילים, ונקודת החיתוך C בעצם אינה קיימת.

נסו למצוא דרכים נוספות לחלוקת משולש לארבעה משולשים שווי-שטח.

תשובה: ראו רעיונות בפעילות 6.4 משלושה לארבעה בתשובה למשימה 11.



- למקבץ הראשון:
  - מבררים מה המיוחד במקבילית שבה חוצי זוויות סמוכות נפגשים על הצלע שממול , ומה קורה אם המקבילית היא מלבן או מעוין.
- למקבץ השני :
  - דנים בשתי דרכי הפתרון של שאלה 5, ושואלים אם שתי התוצאות שוות.
  - מרכזים את השאלות שהתלמידים כתבו במשימה 8, ובודקים את פתרונותיהם.
- למקבץ השלישי:
  - מרכזים את השאלות שהתלמידים כתבו במשימה 11, ובודקים את פתרונותיהם