6.4 משלושה לארבעה

מטרות

- שימוש ביחסי אורכים כדי לחשב יחסי שטחים
- שימוש ביחסי שטחים כדי לחשב יחסי אורכים
- יישום המשפט: התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי-שטח.

אמצעי עזר

ישומון: *משלושה לארבעה*

פתיחה

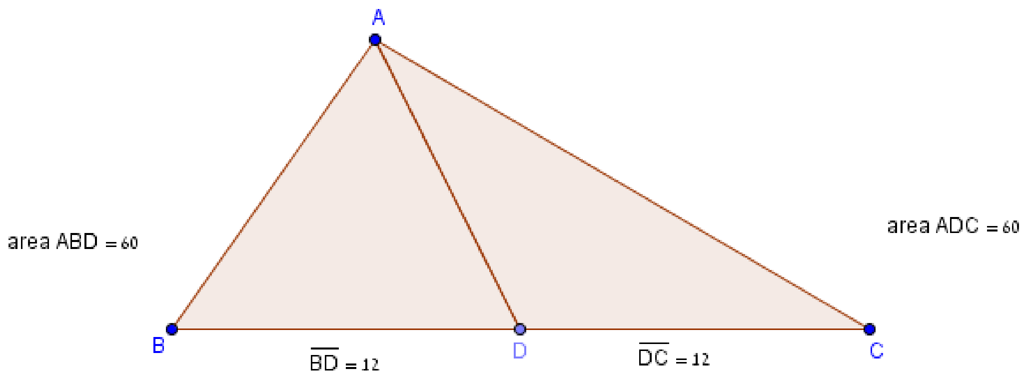
קוראים את הבעיה במליאה, ועונים על השאלה שבמסגרת.

פתרונות והערות

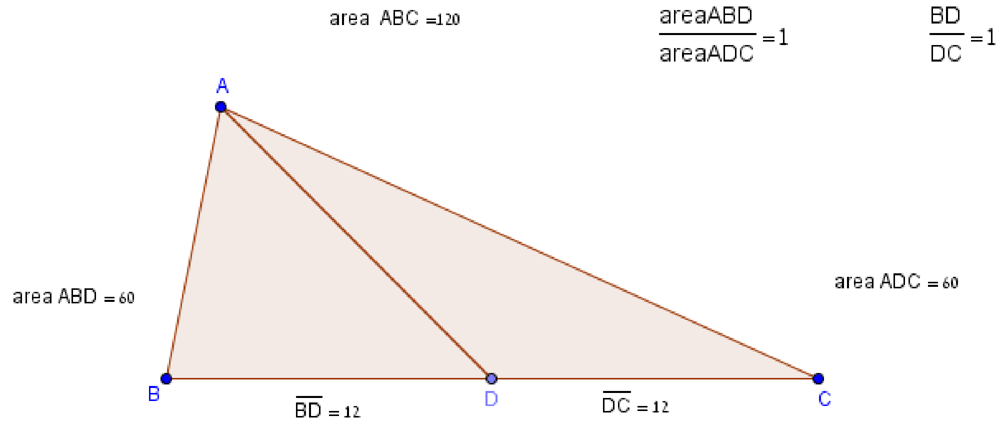
הפעילות עוסקת במשפט: התיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווי- שטח, וביישומיו. התלמידים עוברים בהדרגה מחלוקה לשני משולשים לחלוקות מרובות משולשים.

1. התשובות בכל המשימות הבאות.

2. א. $\frac{BD}{DC}=1$ $\frac{areaABD}{areaADC}=1$

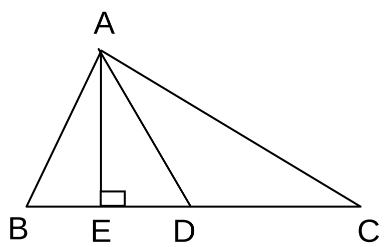


ב.



ג. הקטע המחלק את המשולש לשני משולשים שווי-שטח הוא תיכון במשולש.

.3 AD הוא תיכון במשולש ABC. לכן, BD = DC



הורדנו AE אנך ל-BC. AE גובה משותף לשני המשולשים ABD ו- ADC.

בשני המשולשים יש צלעות שוות והגובה אליהן משותף.

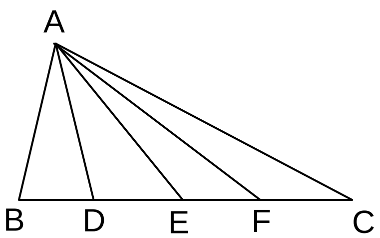
לכן המשולשים שווים בשטח.

התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי-שטח.

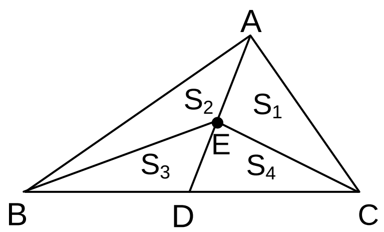
.4 לארבעת המשולשים יהיו שטחים שווים אם יתקיים:

BD = DE = EF = FC

כי אז למשולשים אלה רבעייה של צלעות השוות זו לזו, וגובה משותף.



.5 כדי לחלק את המשולש לארבעה משולשים שווי- שטח, בדרך זו, משרטטים AD תיכון במשולש, ונקודה E באמצע התיכון.



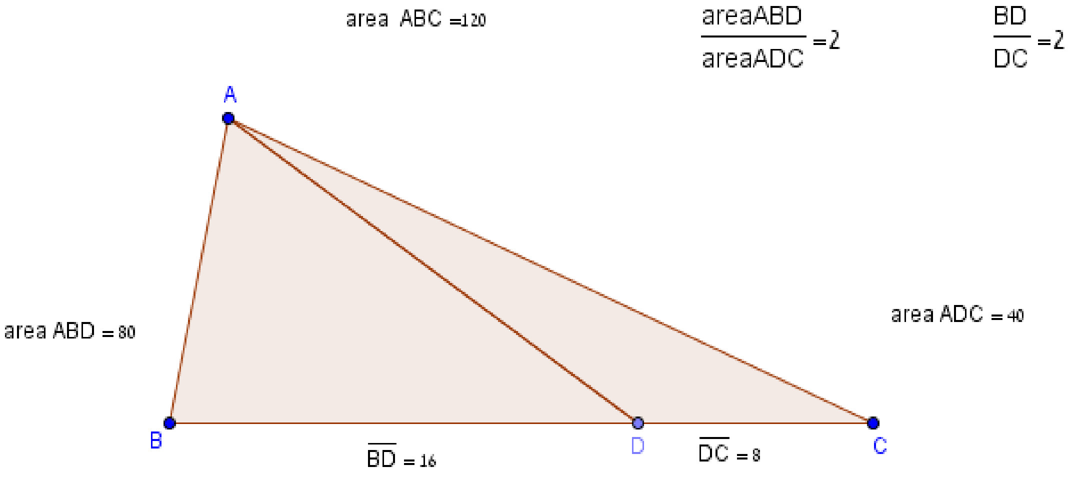
הוכחה: $S_3 = S_4$ (AD תיכון במשולש EBC)

$S_1 = S_4$ (EC תיכון במשולש ADC)

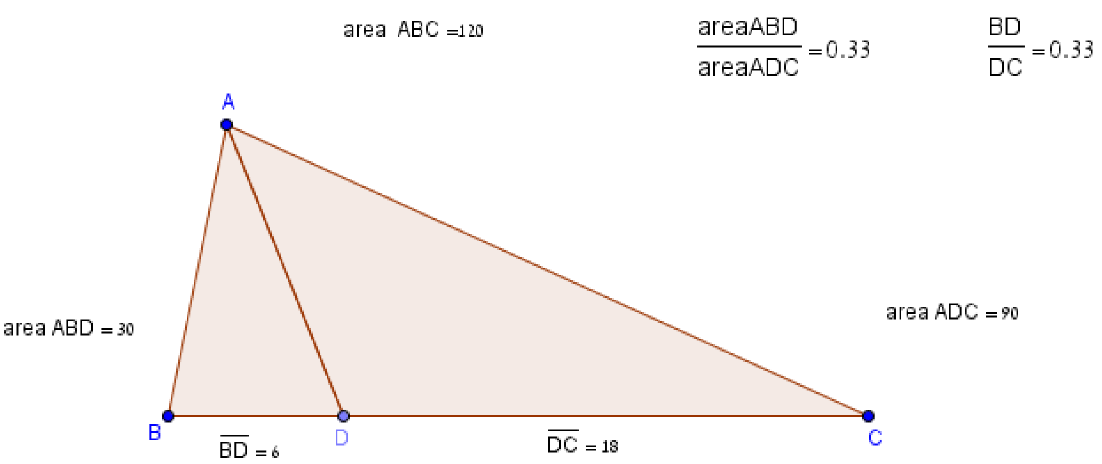
$S_2 = S_3$ (BE תיכון במשולש ABD)

לכן $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

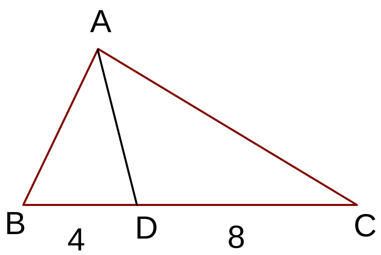
6. א.



ב.



7. א. $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{1}{2}$



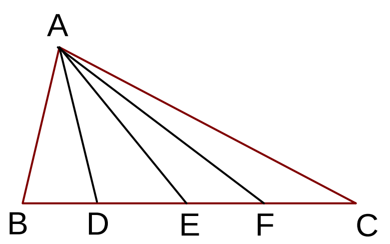
ב. יש לחלק את הקטע BC לארבעה חלקים שווים, ולמקם את הנקודה D בסוף הרבע הראשון.

8. מכיוון שהיחס בין BD לכל הצלע הוא n : 1, הקטע BD הוא אחד מבין n חלקים שווים.

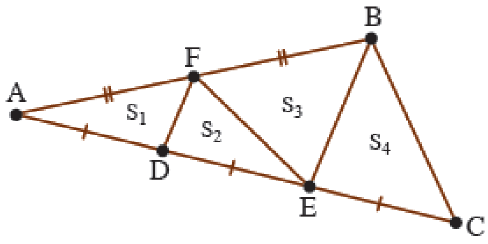
כלומר, הקטע DC ארוך פי 1 – n מהקטע BD. כמו כן, הגובה משותף לשני המשולשים. לכן היחס בין השטחים הנוצרים הוא (1 – n) : 1

9. היחס בין BD ל- DC הוא 3 : 1 . נחלק את הקטע DC ל- 3 חלקים שווים על-ידי כך שנעתיק פעמיים את הקטע BD בהמשך D .

נוצרו 4 קטעים שווים . לכן ארבעת המשולשים המחלקים את המשולש הם שווי-שטח.



10. אפשר למצוא קשרים רבים. למשל,



$S_1 = S_2$ (FD תיכון במשולש AFE)

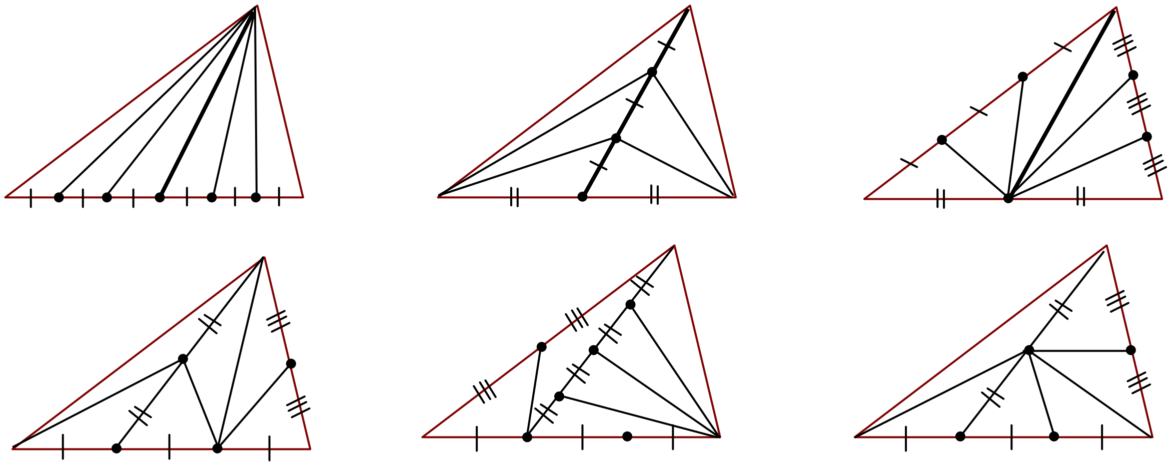
$S_1 + S_2 = S_3$ (EF תיכון במשולש EAB)

$\frac{S_3}{S_2} = 2$ (מסקנה מהקשרים הקודמים)

$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_4} = 2$ (BE מחלק את AC ביחס של 1 : 2)

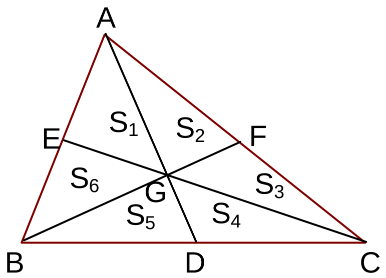
$S_3 = S_4$ (מסקנה מהקשרים הקודמים)

11.



ויש הרבה דרכים נוספות.

12. א. למרות שהתלמידים לא למדו עדיין ש התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת , מניחים כהנחה סמויה את נכונות המשפט.



$S_5 = S_4$ (GD תיכון במשולש GBC)

$S_2 = S_3$ (GF תיכון במשולש GAC)

$S_1 = S_6$ (GE תיכון במשולש GAB)

$S_1 + S_6 + S_5 = S_2 + S_3 + S_4$ (AD תיכון במשולש ABC)

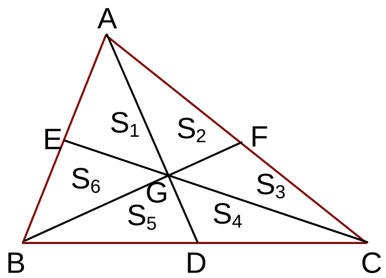
לכן, $S_1 + S_6 = S_2 + S_3$

וכן, $2S_1 = 2S_2$

לכן $S_1 = S_2$

באותו אופן אפשר להוכיח שוויון שאר זוגות השטחים, ולהראות שכל השטחים שווים.

ב. נתייחס למשל לתיכון AD ולנקודת החיתוך G בין שלושת התיכונים.



$S_2 = S_3 = S_4$ (לפי הסעיף הקודם)

לכן, $S_2 + S_3 = 2S_4$

לכן, AG = 2 GD.

כלומר G מחלקת את הקטע DA ביחס של 2 : 1.

באותו אופן אפשר להוכיח על שאר התיכונים.

.1

א. $24 : 4 = 6$
$AD = 6$
$DB = 3 \cdot 6 = 18$

ב. $24 : 6 = 4$
$AD = 4$
$DB = 5 \cdot 4 = 20$

ג. $24 : 8 = 3$
$AD = 3 \cdot 3 = 9$
$DB = 5 \cdot 3 = 15$

ד. $24 : 5 = 4.8$
$AD = 2 \cdot 4.8 = 9.6$
$DB = 3 \cdot 4.8 = 14.4$

.2 א. $\frac{S_{CDB}}{S_{CDA}} = \frac{DB}{DA} = \frac{3}{1}$

ב. $\frac{S_{CDA}}{S_{HAD}} = \frac{CA}{HA} = \frac{2}{1}$

ג. $\frac{S_{CAB}}{S_{CDA}} = \frac{AB}{DA} = \frac{4}{1}$

ד. $\frac{S_{CHD}}{S_{CAD}} = \frac{CH}{CA} = \frac{1}{2}$

ה. $\frac{S_{EDB}}{S_{CDA}} = \frac{\frac{1}{3}S_{CDB}}{S_{CDA}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{1}$

ו. $\frac{S_{BEC}}{S_{BDE}} = \frac{EC}{DE} = \frac{2}{1}$

ז. $\frac{S_{BDC}}{S_{BDF}} = \frac{DC}{DF} = \frac{3}{2}$

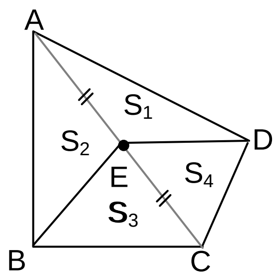
ח. $\frac{S_{BDE}}{S_{HAD}} = \frac{\frac{1}{3}S_{BDC}}{\frac{1}{2}S_{ADC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{2}{1}$

נקודה E היא אמצע האלכסון AC.

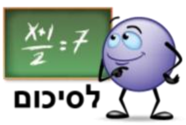
נחבר את E עם D ועם B.

קיבלנו שני מרובעים ABED ו- CBED שווי שטח,

כי $S_1 = S_4$ ו- $S_2 = S_3$



1. בהמשך למשימה 11 נסו למצוא דרכים נוספות לחלוקת משולש לשישה משולשים שווי-שטח.
2. התבוננו בציור או בצילום אמנותי ובדקו אם היצירה נעשתה בהתאם לכללי הקומפוזיציה המתוארים "בפועל"?.



- מרכזים ודנים בדרכי פתרון שונות ובעקרונות לחלוקת משולשים לחלקים שווי שטח, ואפשר להרחיב גם למצולעים נוספים.
- דנים במקרים בהם חלוקת מידת האורך של קטע ביחס מסוים יוצרת שתי צורות ששטחיהן מתייחסות באותו יחס (משימות 6-9), ושואלים שאלות שבהן יחס השטחים נתון . כמו: חלקו משולש על- ידי קטע, מקודקוד אל צלע שמולו, כך ששטחי המשולשים הנוצרים יתייחסו זה לזה כמו 3 : 2. הוכיחו.