6.3 שמיכות טלאים

מטרות

- העמקת ההבנה של המושג דמיון מצולעים
- חישובי שטח והיקף של צורות
- יצירת קשר בין מושגים מתמטיים לתחומים אחרים

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני *Excel*

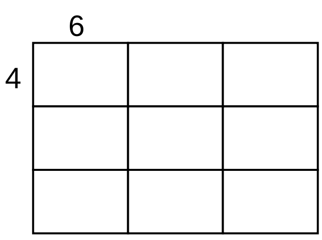
פתיחה

קוראים את הבעיה במליאה, ועונים על השאלה שבמסגרת.

פתרונות והערות

הפעילות עוסקת בצורות דומות שנוצרות תוך כדי הגדלה והקטנה של צורה נתונה. עוסקים בקשר בין היקפי הצורות, וכן בקשר בין שטחיהן . יחידת המדידה של שטח אינה בכל מקרה היחידה הסטנדרטית . בחלק מן המשימות משתמשים במשולש שווה-צלעות כיחידת שטח. כך למשל אפשר למדוד את השטח של משושה משוכלל באמצעות מספר יחידות השטח המשולשות המוכלו ת בו. מספר זה שונה כמובן מ מידת השטח המתקבלת אם מודדים את השטח באמצעות יחידות השטח הריבועיות המקובלות בדרך כלל. כדי להרגיל את התלמידים לרעיון של יחידות שטח שרירותיות, השתמשנו בתחילת הפעילות במושג "מספר הטלאים " במקום במושג "שטח". בהמשך הפעילות מתייחסים להרחב ה של משפט פיתגורס ביחידות שטח משולשות . ההתייחסות למשפט היא דרך משמעות ו הגיאומטרית: סכום מספרי יחידות השטח שעל הניצבים שווה למספר יחידות השטח שעל היתר , ולא דרך משמעותו האלגברית-כמותית.

1. א. אם מגדילים את מספר הטלאים שבכל צד (האורכים) פי n, מספר הטלאים (השטח) יגדל פי n^2. את התכונה הזאת התלמידים אמורים לדעת מלימודיהם בכיתה . למשל, אם נגדיל בכל צד את מספר הטלאים של השמיכה שבתמונה פי 3, מספר הטלאים של השמיכה החדשה יהיה יגדל פי 9 (ראו שרטוט).



הוכחה אלגברית:

נניח שמידות השמיכה הם a x b, לכן מספר הטלאים בה הוא ab.

לאחר הגדלה פי n מידות השמיכה יהיו: an x bn.

מספר הטלאים בשמיכה הגדולה: abn^2.

זוהי הגדלה פי n^2 ממספר הטלאים בשמיכה המקורית.

ב. כפי שאפשר לראות בשרטוט בסעיף א , אם נגדיל בכל צד את מספר הטלאים של השמיכה שבתמונה פי 3, אורך הסרט של השמיכה החדשה יהיה גדול פי 3.

הוכחה אלגברית:

נניח שמידות השמיכה הם a x b, לכן אורך הסרט מסביבה הוא 2a + 2b.

לאחר הגדלה פי n מידות השמיכה יהיו: an x bn.

אורך הסרט של השמיכה הגדולה: $2an + 2bn = (2a + 2b) \cdot n$.

זוהי הגדלה פי n מאורך הסרט בשמיכה המקורית.

2. א. מספר הטלאים בשמיכה של יובל 48 $(= 8 \cdot 6)$. מספר הטלאים בשמיכה של נאוה גדול ממספר הטלאים בשמיכה של יובל פי 4 $(= 192 : 48)$. לכן מידות האורך בשמיכה של נאוה גדולות פי 2 $(4 = 2^2)$ מהמידות בשמיכה של יובל.

ב. אורך הסרט בשמיכה של יובל 28 $(= 8 \cdot 2 + 6 \cdot 2)$. הסרט בשמיכה של שירה ארוך פי 6 $(= 168 : 28)$. מהסרט בשמיכה של יובל. לכן מידות האורך בשמיכה של שירה גדולות פי 6 מהמידות בשמיכה של יובל.

מספר הטלאים (כלומר, מספר יחידות השטח) בשמיכה של שירה: 1728 $(= 6^2 \cdot 48)$

3. 60 גדול פי 1.5 מ- 40. מכיוון שצורות השמיכות דומות , מידת האורך השנייה גדולה גם היא פי 1.5.

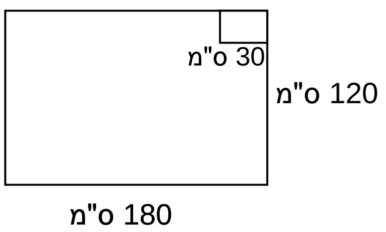
$x = 60 \cdot 1.5 = 90$

4. **אפשרות אחת**: אורך הצלע הארוכה יותר של התחתית הוא 30 ס"מ.

במקרה זה, הצלע המתאימה לגודל זה היא הצלע של 180 ס"מ.

מידות התחתית קטנות פי 6 $(= 30 : 180)$ ממידות השמיכה

לכן אפשר לגזור 36 $(= 6^2)$ תחתיות לסירים.

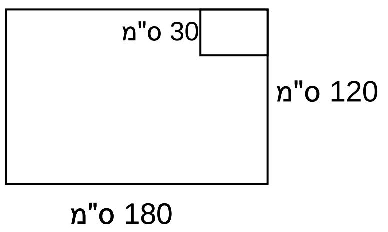


אפשרות שנייה: אורך הצלע הקצרה יותר של התחתית הוא 30 ס"מ.

במקרה זה, הצלע המתאימה לגודל זה היא הצלע של 120 ס"מ.

מידות התחתית קטנות פי 4 $(= 30 : 120)$ ממידות השמיכה

לכן אפשר לגזור 16 $(= 4^2)$ תחתיות לסירים.



5. א. הסדרה היא: 1, 4, 9, 16

ב. סדרת ההיקפים היא: 3, 12, 27, 48

ג. ההיקף 30 יחידות אורך לכן אורך הצלע 10 יחידות אורך. מספר הטלאים הוא 100 $(= 10^2)$.

ד. מספר הטלאים הוא 144, לכן אורך הצלע בתמונה הוא 12 $(144 = 12^2)$ והיקפה 36 יחידות $(= 3 \cdot 12)$

ה. הטענה נכונה. למשל, אם אורך הצלע של משולש אחד הוא 2 יחידות ושל השני 6 יחידות, נמצא שהיקף המשולש הגדול הוא פי 3 מהיקף המשולש הקטן, ושטחו הוא פי 9 משטח המשולש הקטן.

באופן כללי, אפשר תמיד לקחת את המשולש הקטן יותר כיחידת שטח. במקרה זה, אורך הצלע של המשולש הכללי יהיה n ושטחו n^2.

6. רושמים כותרות, ממלאים את השורה הראשונה, וממלאים את השורה השנייה בנוסחאות.

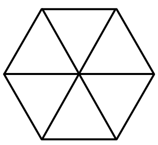
	A	B	C
1	מספר השורה	מספר המשולשים בשורה	סכום המשולשים עד שורה זו
2	1	1	1
3	2	=B2+2	=C2+B3

אם גוררים את הנוסחאות מקבלים:

	A	B	C
1	מספר השורה	מספר המשולשים בשורה	סכום המשולשים עד שורה זו
2	1	1	1
3	2	3	4
4	3	5	9
5	4	7	16
6	5	9	25
7	6	11	36
8	7	13	49
9	8	15	64
10	9	17	81
11	10	19	100
12	11	21	121

7. א. כל משושה מורכב מ- 6 משולשים שווי-צלעות.

ולכן שטחו יהיה פי 6 משטח המשולש המרכיב אותו.



ב. $6a^2$

ג. a הוא המספר החיובי השלם הגדול ביותר המקיים $6a^2 \le 400$

$a^2 \le 66\frac{2}{3}$

לכן מידת האורך הגדולה ביותר היא 8.

8. א. למשל, אם אורך הצלע הוא 3 יחידות, אורך המסגרת הוא 18 יחידות ($= 6 \cdot 3$) ומספר הטלאים הוא 54 ($= 6 \cdot 3^2$)

אם אורך הצלע הוא 8 יחידות, אורך המסגרת הוא 48 יחידות ($= 6 \cdot 8$), ומספר הטלאים הוא 384 ($= 6 \cdot 8^2$)

ב. נסמן ב- a את אורך הצלע במשושה הקטן. היקף המשושה הוא 6a, ומספר הטלאים הוא $6a^2$.

אורך הצלע במשושה הגדול הוא an, ההיקף $6(an)$, ומספר הטלאים $6(an)^2$.

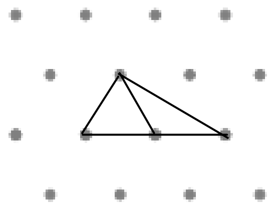
$6(an) = (6a) \cdot n$, $6(an)^2 = (6a^2) \cdot n^2$ לכן הטענה נכונה.

9. א. המעוין שבשרטוט מורכב משני משולשי יחידה, ולכן שטחו 2 יחידות שטח.

ב. המשולש הצבוע שבשרטוט הוא משולש קהה זווית ושווה-שוקיים. שטחו הוא יחידת שטח אחת כי הוא חצי משטח המעוין.

ג. גודל הזוויות של משולש שווה- צלעות הוא 60^0. האלכסון הארוך מחלק את המעוין לשני משולשים חופפים לכן זוויות הבסיס של כל משולש כזה הן בנות 30^0. זווית הראש משלימה את שתי הזוויות ל- 180^0, ולכן היא בת 120^0.

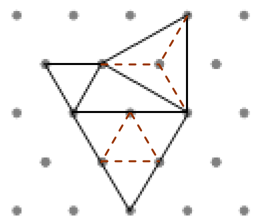
10. א-ב. המשולש שבשרטוט מורכב משני משולשים , משולש אחד שווה-צלעות שכל זוויותיו בנות 60^0 ומשולש שני שווה-שוקיים שזוויותיו בנות 120^0 , 30^0 , 30^0.



לכן זוויות המשולש שבשרטוט הן בנות 90^0 , 60^0 , 30^0 והמשולש ישר-זווית.

ג. שטח המשולש שבשרטוט הוא 2 יחידות שטח כי הוא מורכב משני משולשים ששטחו של כל אחד מהם הוא יחידה אחת.

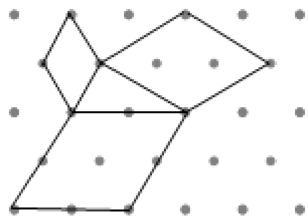
11. א-ג.



שטחי המשולשים הם: 1, 3, 4

ד. סכום שטחי המשולשים הבנויים על הניצבים שווה לשטח המשולש הבנוי על היתר.

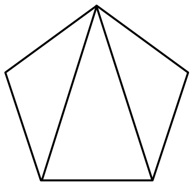
12. א-ג.



שטחי המעוינים הם: 2 , 6 , 8

ד. סכום שטחי המעוינים הבנויים על הניצבים שווה לשטח המעוין הבנוי על היתר.

1. המחומש המשוכלל מורכב משלושה משולשים. שני המשולשים הצדדיים הם שווי-שוקיים וחופפים, לכן גם המשולש האמצעי הוא שווה-שוקיים.



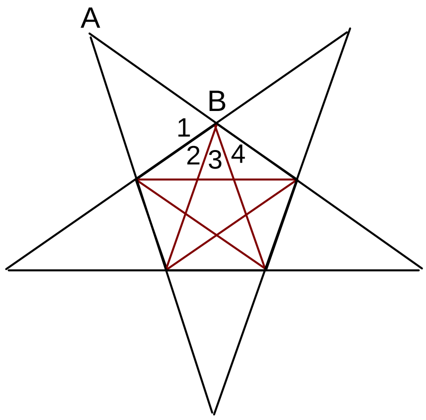
סכום הזוויות הפנימיות במחומש הוא 540^0 (= $180 \cdot 3$)

לכן כל זווית פנימית של המחומש היא בת 108^0 (= $540 : 5$).

זוויות הבסיס של שני המשולשים החופפים שוות ל- 36^0 ($\frac{180-108}{2}$).

זווית הראש של המשולש האמצעי שווה ל- 36^0 (= $108 - 2 \cdot 36$).

זווית בסיס של המשולש האמצעי שווה ל- 72^0 (= $108 - 36$).



בשרטוט הכוכב:

$<B_{2+3+4} = 108^0$, לכן $<B_1 = 72^0$.

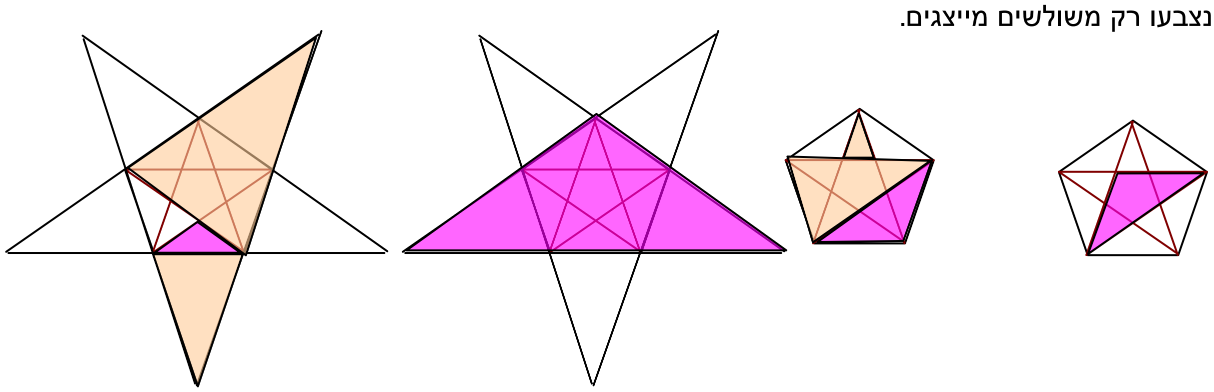
זווית A שווה ל- 36^0 (= $180 - 2 \cdot 72$).

לפי החישובים במשושה:

$<B_2 = <B_4 = <B_3 = 36^0$,

כל אחת מיתר הזוויות שווה לאחת הזוויות שחישבנו, לפי הדמיון.

2. כל קבוצה של משולשים דומים צבועה בשרטוט בצבע אחר לכל קבוצה שייכים משולשים נוספים דומים להם. נצבעו רק משולשים מייצגים.



3. צורות דומות בשרטוט הן למשל,

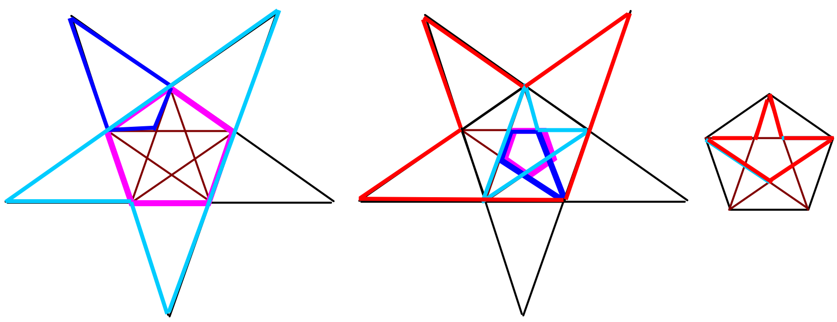
כוכב קטן וכוכב גדול

מחומש קטן ומחומש גדול

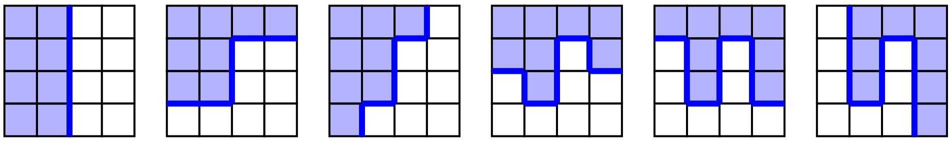
זוג דלתונים קמורים

זוג דלתונים קעורים

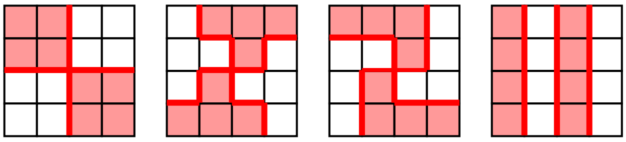
צורות נוספות דומות שאין להן שם.



א.

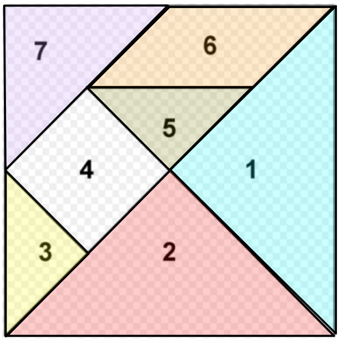


ב.



למסיימים

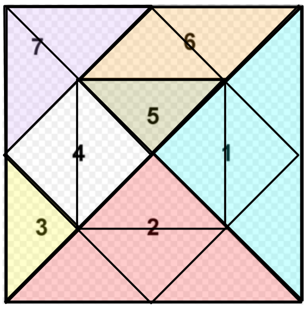
1. לפניכם טנגרם.



א. הציעו יחידת שטח, ומדדו בעזרתה את כל חלקי הטנגרם.

תשובה: אפשר למשל, לבחור כיחידה את חלק מספר 5.

חלק זה מהווה $\frac{1}{16}$ מהריבוע השלם (ראו שרטוט)



בהתאם לכך, השטחים הם:

חלק 1 – 4 יחידות

חלק 2 – 4 יחידות

חלק 3 – 1 יחידה

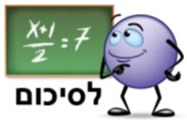
חלק 4 – 2 יחידות

חלק 6 – 2 יחידות

חלק 7 – 2 יחידות

אפשר כמובן לבחור חלק אחר כיחידה, למשל, את חלק 6. בהתאם לכך השטחים הם:

חלק 1 – 2 יחידות	חלק 2 – 2 יחידות	חלק 3 – $\frac{1}{2}$ יחידה
חלק 4 – 1 יחידה	חלק 5 – $\frac{1}{2}$ יחידה	חלק 7 – 1 יחידה



לסיכום

- דנים ברעיון שניתן למדוד שטח עם כל יחידת שטח המאפשרת כיסוי של השטח
- דנים בניסיון להחיל משפטים מוכרים על מצבים חדשים, וברעיון שככל שמשפט הוא יותר כללי יש לבדוק פחות מקרים. למשל, בפעילות הזאת המשפט "הגדלת אורך יחידה פי n גוררת הגדלת השטח פי n^2", הוחל גם על יחידות שאינן ריבועיות.
- דנים ביתרונות ובחסרונות של קביעת יחידות שטח סטנדרטיות