

5.4 סכום המכפלה והסכום (סמ"ס)



- התמודדות עם סיטואציה לא מוכרת – שימוש בפעולה אריתמטית חדשה, ויישום מתמטי של מושג שנלמד על סמך הגדרתו
- בחינה והרחבה של מושג הפעולה: תכונותיה של פעולה, לוח הפעולה, ייצוג של פעולה (לוח מספרי, גיאומטרי, אלגברי, מילולי), אפיון מספרים ביחס לפעולה (איבר ניטרלי, איבר מאפס, מספרים ראשוניים), וחוקי חשבון התקפים תחת הפעולה
- התמודדות עם המושגים הבאים והעמקה בהם דרך הסתכלות "מבחוץ" מהיבט פחות מוכר: חישוב עם פעולה, ביטוי אלגברי, משוואה, פתרון משוואה.
- שימוש באלגברה ככלי לביטוי הכללות ולהנמקת קיום תכונות
- התמודדות עם פתרון משוואות לא שגרתיות ופתרון באמצעות שיקולים וכלים אלגבריים



גליון אלקטרוני (למשל, Excel)



קוראים את ההגדרה ומתחילים במילוי לוח הפעולה (משימה 1).



1.

SMS	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	5	7	9	11	13	15
2	2	5	8	11	14	17	20	23
3	3	7	11	15	19	23	27	31
4	4	9	14	19	24	29	34	39
5	5	11	17	23	29	35	41	47
6	6	13	20	27	34	41	48	55
7	7	15	23	31	39	47	55	63

2. א. כן, הפעולה חילופית.

הסבר באמצעות לוח הפעולה

הערך בתא (a, b) בלוח הפעולה זהה לערך בתא (b, a).

משמעות שוויון זה עבור אותם ערכים שנבחרו לכל a, b היא

$$a \text{ SMS } b = b \text{ SMS } a$$

הנמקה אלגברית

$$a \text{ SMS } b = ab + a + b$$

$$b \text{ SMS } a = ba + b + a$$

$$ab + a + b = ba + b + a$$

פעולות החיבור והכפל הן חילופיות ולכן לכל a, b, כלומר, פעולת סמ"ס גם כן חילופית.

ב. המספר 0 הוא איבר ניטרלי (או איבר יחידה) לפעולה זו, כלומר, לכל a

$$a \text{ SMS } 0 = a \cdot 0 + a + 0 = a$$

מציאת האיבר הניטרלי באמצעות משוואה

מסמנים ב- n את האיבר הניטרלי וב- a מספר כלשהו.

תוצאת פעולת סמ"ס בין n ל- a היא

n הוא איבר ניטרלי ומכאן מקבלים את המשוואה

פותרים את המשוואה

$$n \text{ SMS } a = na + n + a$$

$$na + n + a = a$$

$$n(a + 1) = 0$$

$$n = 0$$

3. בכל סעיף נציג דרך פתרון שונה.

א. פתרון באמצעות לוח פעולה

מחפשים בלוח באיזה תא בשורה 5 הערך הוא 47, ומסיקים כי $a = 7$.

ב. פתרון אלגברי

"מתרגמים" את פעולת סמ"ס ופותרים את המשוואה

$$20 \text{ SMS } a = 104$$

$$20a + 20 + a = 104$$

$$a = 4$$

ג. פתרון באמצעות תכונות הפעולה

ניתן להציג פתרון זה רק אחרי פתרון משימה 4.

במשימה 4 מוצאים כי

$$a \text{ SMS } b = (a + 1)(b + 1) - 1$$

ובאופן מילולי: תוצאת פעולת הסמ"ס בין שני מספרים נתונים, קטנה ב-1 ממכפלת שני המספרים העוקבים למספרים הנתונים.

$$a \text{ SMS } 4 = 1009$$

על פי תכונה זו אפשר לתרגם את המשוואה

$$(a+1) \cdot 5 = 1010$$

למשוואה

$$a + 1 = 202$$

מכאן ש-

$$a = 201$$

והפתרון הוא

4. א. $a \text{ SMS } b = ab + a + b$

ב. תוצאת פעולת הסמ"ס היא שטח הצורה שבשרטוט, הניתנת לפרוק לשלושה חלקים מלבניים.

ג. ניתן למצוא את שטח השרטוט הנתון גם על ידי מציאת שטח המלבן שמידותיו $(b + 1) \times (a + 1)$ והפחתת שטח הפינה הימנית התחתונה החסרה.

לכן ביטוי אלגברי מתאים אחר הוא $a \text{ SMS } b = (a + 1)(b + 1) - 1$ ובאופן מילולי: תוצאת פעולת הסמ"ס בין שני מספרים נתונים, קטנה ב-1 ממכפלת שני המספרים העוקבים למספרים הנתונים.

5.

מאחר שהפעולה היא חילופית, כל פתרון מוצג כזוג לא סדור של מספרים.

נשתמש בתכונת הפעולה שנמצאה במשימה 4: $ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$

במו כן מכיוון ש-0 הוא מספר ניטרלי (ראו משימה 2ב), הזוג 0 והמספר הנתון הוא אחד הפתרונות הדרושים בכל סעיף.

א. $(a + 1)(b + 1) - 1 = 17$

$$(a + 1)(b + 1) = 18$$

$$a + 1 = 2 \quad b + 1 = 9$$

אחד הפתרונות הוא:

כלומר הזוג 1,8 הוא פתרון.

באותה דרך 2,5 הוא פתרון טבעי נוסף

כאמור לעיל 0,17 הוא פתרון נוסף.

$$(a + 1)(b + 1) - 1 = 99$$

$$(a + 1)(b + 1) = 100$$

$$a + 1 = 2 \quad b + 1 = 50$$

ב. משתמשים בתכונה שנמצאה במשימה 4

כלומר, מחפשים זוגות מספרים טבעיים a, b שיקיימו

אחד הפתרונות הוא

כלומר הזוג 1,49 הוא פתרון

פתרונות טבעיים נוספים הם זוגות המספרים 3,24 4,19 9,9

כאמור לעיל 0,99 הוא פתרון נוסף.

$$(a + 1)(b + 1) - 1 = 120$$

ג.

ולכן פתרון טבעי של המשוואה הוא הזוג 10,10

פתרון נוסף הוא הזוג 0,120

$$(a + 1)(b + 1) - 1 = 16$$

ד.

$$(a + 1)(b + 1) = 17$$

אין פתרונות טבעיים אבל הזוג 0,16 הוא פתרון.

6. לוח לפעולת סמ"ס בגודל 20x20:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
3	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62
4	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83
5	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	74	79	84	89	94	99	104
6	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125
7	6	13	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	97	104	111	118	125	132	139	146
8	7	15	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	119	127	135	143	151	159	167
9	8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188
10	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109	119	129	139	149	159	169	179	189	199	209
11	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	120	131	142	153	164	175	186	197	208	219	230
12	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	131	143	155	167	179	191	203	215	227	239	251
13	12	25	38	51	64	77	90	103	116	129	142	155	168	181	194	207	220	233	246	259	272
14	13	27	41	55	69	83	97	111	125	139	153	167	181	195	209	223	237	251	265	279	293
15	14	29	44	59	74	89	104	119	134	149	164	179	194	209	224	239	254	269	284	299	314
16	15	31	47	63	79	95	111	127	143	159	175	191	207	223	239	255	271	287	303	319	335
17	16	33	50	67	84	101	118	135	152	169	186	203	220	237	254	271	288	305	322	339	356
18	17	35	53	71	89	107	125	143	161	179	197	215	233	251	269	287	305	323	341	359	377
19	18	37	56	75	94	113	132	151	170	189	208	227	246	265	284	303	322	341	360	379	398
20	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199	219	239	259	279	299	319	339	359	379	399	419
21	20	41	62	83	104	125	146	167	188	209	230	251	272	293	314	335	356	377	398	419	440

מאפיינים לדוגמה בטבלה:

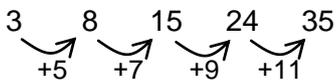
- אם נמחק בלוח כפל את השורה הראשונה והעמודה הראשונה, ונחסר 1 מכל תוצאה, נקבל את הלוח המוצג. מאפיין זה נובע מהתכונה שתוצאת פעולת הסמ"ס קטנה ב-1 ממכפלת העוקבים לשני מספרים שלמים.
- המספרים בשורה של הגורם 1 גדלים בדילוגים של 2, המספרים בשורה של הגורם 2 גדלים בדילוגים של 3 וכן הלאה. באופן כללי המספרים בשורה של הגורם n גדלים בדילוגים של (n+1).

הסבר אלגברי:

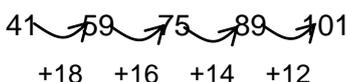
מסמנים ב- n את המספר המתאים לשורה כלשהי. ההבדל בין התא בעמודה ה- a לתא הסמוך בעמודה ה- (a+1) הינו

$$n \text{ SMS } (a + 1) - n \text{ SMS } a = [n(a + 1) + n + (a + 1)] - [na + n + a] = n + 1$$

- אותה תכונה מאפיינת גם את המספרים בעמודות.
- הלוח סימטרי ביחס לאלכסון הראשי (האלכסון המתחיל בפינה השמאלית העליונה). תכונה זאת נובעת מהחילופיות של פעולת סמ"ס.
- בכל אלכסון היורד משמאל לימין, גודל הדילוגים בין מספרים סמוכים גדל ב-2. לדוגמה, סדרת המספרים שעל האלכסון הראשי



- בכל אלכסון שיוורד מימין לשמאל, גודל הדילוג בין המספרים קטן ב-2 עד אשר הוא "נפגש" עם האלכסון הראשי (ואז המספרים חוזרים על עצמם בסדר הפוך).



לדוגמה, סדרת המספרים שעל האלכסון המשני:

7. כל מספר הקטן ב-1 ממספר ראשוני אינו יכול להתקבל כתוצאה של פעולת סמ"ס בין שני מספרים.

הסבר: במקרה זה, המכפלה (a + 1)(b + 1) תהיה מספר ראשוני – שגורמיו הטבעיים היחידים הם 1 והמספר עצמו. לכן אחד מבין שני המספרים שבפעולת ה- סמ"ס הוא 0 – שהינו מספר לא טבעי.

8. מסמנים ב- y את ספרת העשרות וב- x את ספרת האחדות.

המספר הדו-ספרתי הינו

בונים משוואה על-פי התיאור בשאלה

"מתרגמים" את פעולת ה- sm "

מפשטים

$y \neq 0$ (ספרת העשרות אינה יכולה להיות 0) ולכן הפתרון הוא

כל המספרים הדו-ספרתיים שספרת האחדות שלהם היא 9.

$$10y + x$$

$$x \text{sm} y = 10y + x$$

$$xy + x + y = 10y + x$$

$$9y = xy$$

$$x = 9$$

9. א. פעולת sm היא חילופית ולכן

ב.

ג.

ד.

על סמך סעיף ג'

$$a \text{sm} 3 = 16$$

$$2 \cdot (3 \text{sm} a) = 2 \cdot 16 = 32$$

$$3 \text{sm} a = 16 \Rightarrow 3a + a + 3 = 16 \Rightarrow 4a + 3 = 16 \Rightarrow 4a = 13$$

$$3 \text{sm} (a + 1) = 3(a + 1) + 3 + (a + 1) = 4a + 7$$

$$4a + 7 = 13 + 7 = 20$$



מתייקר על כולו

1. א. $y + 3 = 2x \quad / - 3$

ב. $y - 7 = -3x \quad / + 7$

2.

ג. $2y = 4x + 12 \quad / : 2$

ד. $y + 3x - 4 = 0 \quad / - 3x + 4$

sm	2	$x + 3$
x	$3x + 2$	$x^2 + 5x + 3$
$x + 1$	$3x + 5$	$x^2 + 6x + 7$



* פתרון: 41312432, או הסידור בסדר ספרות הפוך - 23421314.

מוצאים את הפתרונות באמצעות חיפוש שיטתי. לדוגמה:

• מתחילים במיקום של שתי ספרות ה-4. ישנן 3 אפשרויות:

$$4 _ _ _ 4 _ _$$

$$_ 4 _ _ _ 4 _$$

$$_ _ 4 _ _ _ 4$$

* מבוסס על אולימפיאדת זוטא תשע"א – פתרון לשאלון לכיתה ח - שלב א, מכון דוידסון לחינוך מדעי
<http://davidson.weizmann.ac.il/compzuta>

שימו לב שהאפשרות השלישית היא סימטרית לאפשרות הראשונה, ולכן מספיק לבדוק את שתי האפשרויות הראשונות.

- בכל אפשרות ממקמים באופן שיטתי את שתי ספרות ה-3.

שימו לב כי לא ניתן למקם את הספרה 3 מימין לספרה 4 השמאלית, ולכן בסך-הכל יש ארבע אפשרויות:

$$\begin{array}{cccc} 4 & _ & 3 & _ _ & 4 & 3 & _ \\ 4 & _ _ & 3 & _ & 4 & _ & 3 \\ 3 & 4 & _ _ & 3 & _ & 4 & _ \\ _ & 4 & _ & 3 & _ _ & 4 & 3 \end{array}$$

- בודקים אם ניתן להשלים את שאר הספרות כנדרש.
- לאחר שנמצא פתרון אחד, גם המספר הכתוב בסדר ספרות הפוך הוא פתרון.



1. איבר מאפס של פעולה, הוא מספר שתוצאת פעולתו עם כל מספר אחר היא המספר המאפס. למשל, 0 הוא האיבר המאפס של פעולת הכפל. מגדירים את פעולת ה- סמ"ס על קבוצת המספרים השלמים (חיוביים שליליים ואפס). מצאו את האיבר המאפס של פעולת ה- סמ"ס.

2. הראו כי חוק הקיבוץ מתקיים תחת פעולת סמ"ס, כלומר, עבור מספרים a, b, c מתקיים

$$(a \text{ SMS } b) \text{ SMS } c = a \text{ SMS } (b \text{ SMS } c)$$

תשובות:

1. מסמנים ב- z את האיבר המאפס, וב- a מספר כלשהו. לכל a מתקיים מפשטים ופותרים

$$za + z + a = z$$

$$za + a = 0$$

$$a(z + 1) = 0$$

$$z = -1$$

$$a \text{ SMS } (-1) = -1$$

(-1) הוא האיבר המאפס של פעולת סמ"ס, כלומר, לכל a

2. בודקים אם לכל a, b, c מתקיים מפשטים את כל אחד משני הביטויים:

$$(a \text{ SMS } b) \text{ SMS } c = a \text{ SMS } (b \text{ SMS } c)$$

$$(a \text{ SMS } b) \text{ SMS } c = (ab + a + b) \text{ SMS } c = (ab + a + b)c + (ab + a + b) + c =$$

$$= abc + ab + ac + bc + a + b + c$$

$$a \text{ SMS } (b \text{ SMS } c) = a \text{ SMS } (bc + b + c) = a(bc + b + c) + a + (bc + b + c) =$$

$$= abc + ab + ac + bc + a + b + c$$

התקבלו ביטויים זהים, ולכן חוק הקיבוץ מתקיים.



נושאים לדיון:

העמקה במושגים מוכרים בהקשר לפעילות

- ביטוי אלגברי, משוואה ופתרון משוואה (הכוללים פעולות סמ"ס).
- חוקי פעולות החשבון
- מספרים "מיוחדים" ביחס לפעולה (איבר ניטרלי, איבר מאפס, מספרים ראשוניים).

תכונות פעולת הסמ"ס והשוואה לתכונות פעולות החיבור והכפל:

- ייצוג גיאומטרי של הפעולה
- ייצוג אלגברי של הפעולה
- חוקי פעולות החשבון: חילוף וקיבוץ
- קיום איבר ניטרלי ואיבר מאפס
- סימן הפעולה בין שני מספרים בעלי סימנים זהים או בעלי סימנים מנוגדים
- התכונה כי תוצאת פעולת הסמ"ס בין שני מספרים נתונים, קטנה ב-1 ממכפלת שני המספרים העוקבים למספרים הנתונים (משימה 4).

הקשר שבין פעולת סמ"ס (המוגדרת עבור קבוצת המספרים השלמים) לפעולת כפל

מהתכונה שבמשימה 4 (תוצאת פעולת הסמ"ס בין שני מספרים נתונים, קטנה ב-1 ממכפלת שני המספרים העוקבים למספרים הנתונים) נובעים הקשרים הבאים:

- לוח פעולת הסמ"ס הוא לוח פעולת הכפל אלא שהמספרים קטנים ב-1
- האיבר הניטרלי של פעולת סמ"ס (0) קטן ב-1 מהאיבר הניטרלי של פעולת הכפל (1)
- האיבר המאפס של פעולת סמ"ס (-1) קטן ב-1 מהאיבר הניטרלי של פעולת הכפל (0)
- כדי למצוא "גורמים" של מספר ביחס לפעולת סמ"ס, מפרקים את המספר העוקב לו לגורמים ומפחיתים מהם 1 (משימה 5).

מאפיינים של לוח פעולת סמ"ס והצדקתם (מפורט במדריך למשימה 6)