

5.3 שלושה חברים



- חקר וניתוח שלבי ביצוע של תהליך בתנאים שונים, ומציאת מאפיינים כלליים
- שימוש בדרכים שונות לפתרון בעיות מילוליות: ניסוי וטעייה, היפוך דרך הפתרון מהסוף להתחלה ודרך אלגברית
- תיאור תהליך בעל מספר שלבים באמצעות ביטויים אלגבריים בשני משתנים, בניית משוואות מתאימות למשימות, והבנת משמעות הפתרון המתקבל בסיטואציה הנחקרת.



גיליון אלקטרוני (למשל, Excel).



מתחילים למלא את הטבלה שבמשימה 1.



1. א.

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון	100	10	20	40
בן	60	120	50	100
גליה	30	60	120	50

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון	110	10	20	40
בן	70	140	70	140
גליה	30	60	120	30

ב. במקרה הראשון, גליה הרוויחה בסוף העברות 20 שקלים ($50 - 30$).

במקרה השני, סכום הכסף שהיה ברשותה של גליה בתחילת העברות ובסופן היה זהה (30 שקלים), ולכן גליה לא הרוויחה ולא הפסידה.

2. נוסחאות מתאימות לשלושת שלבי ההעברות:

E	D	C	B	A	
שלב שלישי: גליה מעבירה	שלב שני: בן מעביר	שלב ראשון: אלון מעביר	מצב התחלתי		1
=D2*2	=C2*2	=B2-B3-B4		אלון	2
=D3*2	=C3-C2-C4	=B3*2		בן	3
=D4-D3-D2	=C4*2	=B4*2	30	גליה	4

חיפוש שיטתי

מקבעים את הסכום של בן ומשנים את הסכום של אלון עד לקבלת תוצאה רצויה

- בוחרים סכומים התחלתיים לאלון ובן (תאים B2, B3),
 - משנים רק את הסכום ההתחלתי של אלון (תא B2),
 - שמים לב לקשר בין שינוי סכום זה (תא B2) לבין הסכום הסופי של גליה (תא E4),
 - על פי קשר זה מגיעים למצב שבו בתא E4 מופיע הסכום 30,
 - בודקים כי אין תאים בטבלה שבהם מופיעים מספרים שליליים.
- משנים את הסכום ההתחלתי של בן, וחוזרים שוב על התהליך המתואר.

הפעלת שיקולים

באמצעות חיפוש שיטתי מגיעים לטבלה שבה הסכום הסופי של גליה הוא 30 שקלים. משנים את הנתונים שבטבלה זו באופן הבא:

- מורידים מהסכום ההתחלתי של אלון סכום כסף מסוים ואותו מוסיפים לסכום ההתחלתי של בן (או להיפך),
- בודקים כי אין תאים בטבלה שבהם מופיעים מספרים שליליים.

הערה: במשימה 4 התלמידים מוצאים תנאי הכרחי למילוי הטבלה (סכום הכסף ההתחלתי המשותף לאלון ובן הוא 180 שקלים)

3. ניסוי וטעייה

מנסים אפשרויות שונות לסכומים ההתחלתיים, בודקים אם בסוף לגליה יש 30 שקלים, ומוודאים כי אין תאים בטבלה שבהם מופיעים מספרים שליליים.

הפעלת שיקולים

הטבלה השנייה במשימה 1, עונה על הדרישה בסעיף 3.ב. (סכום הכסף הסופי של גליה הוא 30 שקלים). משנים את הנתונים שבטבלה זו באופן הבא:

- מורידים מהסכום ההתחלתי של אלון סכום כסף מסוים ואותו מוסיפים לסכום ההתחלתי של בן (או להיפך),
- ממלאים את הטבלה ובודקים כי אין תאים בטבלה שבהם מופיעים מספרים שליליים.

הערה: במשימה 4 התלמידים מוצאים תנאי הכרחי למילוי הטבלה (סכום הכסף ההתחלתי המשותף לאלון ובן הוא 180 שקלים)

4. א.

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון	x	$x - y - 30$	$2x - 2y - 60$	$4x - 4y - 120$
בן	y	2y	$3y - x - 30$	$6y - 2x - 60$
גליה	30	60	120	$210 - x - y$

ב. סכום הכסף הסופי של גליה הוא 30, ומכאן מקבלים את המשוואה $210 - x - y = 30$

ולאחר פישוט $x + y = 180$

מסקנה (במילים): אם סכום הכסף ההתחלתי והסופי של גליה הוא 30, אז סכום הכסף ההתחלתי המשותף לאלון ובן הוא 180 שקלים.

הערה: מאחר שהסכום המשותף לאלון ובן בהתחלת העסקאות ובסופן הוא אותו סכום, ניתן לבנות גם את המשוואה, $(4x - 4y - 120) + (6y - 2x - 60) = x + y$

5. בטבלה של אלמוג סכום הכסף ההתחלתי והסופי של גליה הוא 30 שקלים, ולפי המסקנה במשימה 4 נובע

סכום הכסף ההתחלתי המשותף לאלון ובן חייב להיות 180 שקלים. בטבלה של אלמוג סכום הכסף ההתחלתי המשותף לאלון ובן הוא 140 שקלים ולכן לא ניתן להשלים טבלה זו.

6. דרך אלגברית

ממלאים טבלה בדומה לטבלה המתוארת במשימה 4:

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון	x	$x - y - 50$	$2x - 2y - 100$	$4x - 4y - 200$
בן	y	2y	$3y - x - 50$	$6y - 2x - 100$
גליה	50	100	200	$350 - x - y$

סכום הכסף הסופי של גליה הוא 50, ומכאן מקבלים את המשוואה $350 - x - y = 50$

ולאחר פישוט $x + y = 300$

ולכן סכום הכסף שברשות שלושת החברים בהתחלה הוא 350.

דרך פתרון מהסוף להתחלה

גליה מכפילה את הסכום שלה בעסקה הראשונה והשנייה ולכן סכום הכסף שלה משתנה כך,

$$50 \leftarrow 100 \leftarrow 200 \leftarrow 50.$$

בשלב האחרון גליה העבירה 150 שקלים לאלון ובן ביחד (50 - 200) ובכך הכפילה את הסכום של כל אחד מהם. לפיכך בשלב האחרון הסכום המשותף לאלון ובן היה 300 שקלים. מכאן שהסכום הכולל שברשות שלושת החברים בסוף העסקאות היה 350 שקלים (300 שקלים ברשותם של אלון ובן ו-50 שקלים ברשותה של גליה).

ביצוע העסקאות מתנהל במערכת סגורה (סכום הכסף הכולל של שלושת החברים לא נגרע ולא גדל במהלך העסקאות), ולכן סכום הכסף הכולל שברשות שלושת החברים בהתחלה זהה לסכום הכסף הכולל הסופי שברשותם (ולמעשה לסכום הכולל בכל שלב). מכאן שאם הסכום הכולל בסוף העסקאות הוא 350 שקלים, גם הסכום הכולל שברשות שלושת החברים בהתחלת העסקאות הוא 350 שקלים.



1. משוואות א, ד.

2. א. אינו אפשרי, 10, אינו אפשרי
ב. 32, אינו אפשרי, -28
ג. 15, $\frac{1}{15}$, אינו אפשרי



* פתרון אלגברי

מסמנים ב- x את מספר המטבעות בערך של 5 שקלים ($0 \leq x \leq 10$ מספר שלם).

$$5x + (10 - x) = 37$$

משוואה מתאימה

הפתרון למשוואה זו אינו שלם, ומכאן שרותם שגה בחישוב.

פתרון באמצעות שיקולי זוגיות

37 הוא סכום של מספר אי-זוגי ומספר זוגי. מאחר שגם 5 וגם 1 הם מספרים אי-זוגיים, דרוש מספר אי-זוגי של מטבעות בערך של 5 שקלים, ומספר זוגי של מטבעות בערך של 1 שקל (או להיפך). כלומר, כמות המטבעות היא מספר אי-זוגי ובפרט איננה 10.



המשימות הבאות הן המשך הסיפורים של שלושת החברים שבפעילות

1. בפעם אחרת, חזרו החברים על אותו תהליך. להפתעתם, בסוף העסקאות הם גילו שלכולם אותו סכום כסף – 8 שקלים.

מה סכום הכסף שהיה לכל אחד מהחברים בהתחלה?

2. בפעם נוספת, שוב נהגו שלושת החברים באותו אופן ושוב לגליה היה אותו סכום בהתחלה ובסוף – 30 שקלים. אך לתדהמתם אלון ובן גילו שגם לכל אחד מהם הסכום בהתחלת העסקאות ובסופן זה בדיוק אותו סכום. מצאו אפשרות מתאימה.

*מבוסס על אולימפיאדת זוטא תשע"ג – פתרון לשאלון לכיתה ז' - שלב ב, מכון דוידסון לחינוך מדעי

1. דרך אלגברית

מסמנים ב- x, y, z את הסכומים ההתחלתיים של אלון, בן וגליה, משלימים טבלה מתאימה ובונים מערכת של שלוש משוואות בשלושה נעלמים.
דרך פתרון זו לא תפורט כאן.

דרך פתרון מהסוף להתחלה

ממלאים את הטבלה הבאה מהסוף להתחלה.

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון				8
בן				8
גליה				8

בשלב האחרון, גליה מכפילה את סכום הכסף של אלון ובן, כלומר היא מוסיפה לכל אחד 4 שקלים.
לפיכך העמודה השלישית תיראה כך,

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון			4	8
בן			4	8
גליה			$8 + 4 + 4$	8

בשלב שלפני כן, בן מכפיל את סכום הכסף של אלון וגליה ולכן מעביר לאלון 2 שקלים ולגליה 8 שקלים.
לפיכך העמודה השנייה תיראה כך,

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון		2	4	8
בן		$4 + 2 + 8$	4	8
גליה		8	16	8

בשלב הראשון, אלון מכפיל את סכום הכסף של בן וגליה ולכן מעביר לבן 7 שקלים ולגליה 4 שקלים.
לפיכך העמודה הראשונה תיראה כך,

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון		2	4	8
בן	$2 + 7 + 4$	14	4	8
גליה	4	8	16	8

כלומר, הסכומים ההתחלתיים הם אלון – 13 שקלים, בן – 7 שקלים, גליה – 4 שקלים.

הערה: במילוי הטבלה ניתן להיעזר גם במאפיין שהסכום בכל עמודה הוא $8 + 8 + 8 = 24$.

2. להלן פתרון כללי לבעייה בדרך אלגברית.

מסמנים ב- x, y, z את הסכומים ההתחלתיים של אלון, בן וגליה, ומשלימים את הטבלה הבאה,

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון	x	$x - y - z$	$2x - 2y - 2z$	$4x - 4y - 4z$
בן	y	$2y$	$3y - x - z$	$6y - 2x - 2z$
גליה	z	$2z$	$4z$	$7z - x - y$

הסכום ההתחלתי שברשותו של כל ילד זהה לסכום הסופי, ומכאן מתקבלות 3 משוואות,

$$4x - 4y - 4z = x$$

$$6y - 2x - 2z = y$$

$$7z - x - y = z$$

$$x = 2y$$

לאחר פיתוח המשוואות מקבלים את הקשרים הבאים,

$$y = 2z$$

$$x = 4z$$

לדוגמא, אם $z = 30$ הטבלה המתאימה היא,

שם החבר	מצב התחלתי	שלב ראשון: אלון מעביר	שלב שני: בן מעביר	שלב שלישי: גליה מעבירה
אלון	120	30	60	120
בן	60	120	30	60
גליה	30	60	120	30



דנים בדרכי פתרון שונות למשימות 4,6 ובמשימות בפרק "למסיימים":

- דרכים אלגבריות
- חשיבה מהסוף להתחלה.

דנים במאפיינים בטבלת ההעברות:

- כל העמודות בטבלה מסתכמות לאותו סכום, כלומר, בכל שלב הסכום הכולל שברשות שלושת החברים הוא זהה.
 - מילוי נתונים על הסכום ההתחלתי והסופי של גליה קובע את סכום הכסף הכולל שברשות שלושת החברים.
- לדוגמה: במשימה 4 נתון היה כי סכום הכסף ההתחלתי והסופי של גליה הוא 30 שקלים, ומנתונים אלו בלבד נבע כי סכום הכסף הכולל היה 210 שקלים.