יחידה 5: אלגברה בשני משתנים

5.1 מספר והיפוכו

מטרות

- חקירה של תכונות של מספרים דו-ספרתיים ותלת-ספרתיים והעמקת השימוש בייצוג האלגברי של מספרים אלה
- שימוש בשיקולים או באלגברה להכללה והצדקת טענות
- פתרון בעיות מילוליות הכוללות פתרונות מרובים.

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (למשל, *Excel*).

פתיחה

מבקשים מתלמידים לבחור מספר דו-ספרתי כרצונם, ולמצוא את ההפרש בין מספר זה למספר בו אותן הספרות כתובות בסדר הפוך. בודקים עם התלמידים האם יש תוצאות משותפות?

פתרונות והערות

1. א. **באמצעות ניסוי וטעייה**

בונים זוגות מספרים על-פי המתואר בשאלה ובודקים אם ההפרש הוא 36. מכיוון שבכל מקרה כזה מקבלים הפרש של 36, ממשיכים לבדוק את כל (6) האפשרויות או עוברים בשלב זה לפתרון אלגברי.

פתרון אלגברי

מסמנים ב- x את ספרת האחדות, וב- y את ספרת העשרות

בונים את המשוואה $10(x + 4) + x – (10x + x + 4) = 36$

ולאחר פישוט, $0 = 0$

התחום של x הוא מוגבל, ולכן הפתרון הוא כל המספרים השלמים המקיימים $0 \le x \le 5$

ב. ניסוח שאלה לדוגמה: "נתון מספר דו-ספרתי שספרת העשרות בו גדולה ב- <u>3</u> מספרת האחדות. אם נחסר ממספר זה את המספר בו אותן הספרות כתובות בסדר הפוך, נקבל הפרש <u>27</u>".

פותרים באופן דומה לסעיף 1.א. ומקבלים שהמספרים האפשריים הם כל המספרים הדו-ספרתיים המקיימים את תנאי השאלה, כלומר, 30, 41, 52, 63, 74, 85, 96.

ג. מסמנים ב- x את ספרת האחדות, וב- x + k את ספרת העשרות (x מספר שלם $0 \le x \le 9 - k$)

המספר הוא $10(x + k) + x$

המספר הכתוב בסדר ספרות הפוך הוא $10x + x + k$

ההפרש בין המספר המקורי למספר הכתוב בסדר ספרות הפוך $10(x + k) + x – (10x + x +k)$

ולאחר פישוט, $9k$

מסקנה: ההפרש בין מספר דו-ספרתי לבין המספר בו אותן הספרות כתובות בסדר ספרות הפוך הוא פי 9 מההפרש בין ספרת העשרות לספרת האחדות.

ניתן להגיע להכללה זו גם בדרכים נוספות:

חקירה שיטתית בטבלת מספרים

מחשבים את ההפרש המבוקש בדוגמאות המאורגנות באופן שיטתי

הפרש בין הספרות	1	2	3	...
דוגמא א'	21 – 12 = 9	31 – 13 = 18	…	
דוגמא ב'	54 – 45 = 9	42 – 24 = 18	….	
....				
מסקנה				

שיקולים המבוססים על מבנה המספרים בשיטה העשרונית

כאשר מחליפים בין שתי הספרות:

- ספרת העשרות קטֵנה ב- k ולכן המספר קטֵן ב- 10k
- ספרת האחדות גדֵלה ב- k ולכן המספר גדֵל ב- k

בסך הכול המספר קטֵן ב- 9k.

הערה: אומנם, דרכים אלו מאפשרות להגיע להכללה, אך ההצדקה להכללה זו ניתנת בדרך אלגברית.

2,3. מסקנה: ההפרש בין מספר תלת-ספרתי לבין מספר בו אותן הספרות כתובות בסדר ספרות הפוך הוא פי 99 מההפרש בין ספרת המאות לספרת האחדות.

נוסחאות מתאימות לטבלה:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	הפרש בין ספרת אחדות לספרת מאות		ספרת אחדות	ספרת עשרות	ספרת מאות	מספר תלת ספרתי	מספר בסדר ספרות הפוך	ההפרש בין המספרים
2	1				=C2+A2	=100*E2+10*D2+C2	=100*C2+10*D2+E2	=F2-G2

ניתן להגיע להכללה זו גם בדרכים נוספות:

שיקולים המבוססים על מבנה המספרים בשיטה העשרונית

כאשר מחליפים בין ספרת המאות לספרת האחדות:

- ספרת המאות קטֵנה ב- k ולכן המספר קטֵן ב- 100k
- ספרת האחדות גדֵלה ב- k ולכן המספר גדֵל ב- k

בסך הכול המספר קטֵן ב- 99k.

הכללה אינטואיטבית מהמקרה של מספרים דו-ספרתיים

בודקים את ההפרשים במקרי קצה: $100 – 1, 200 – 2, 300 – 3, …$

על-סמך ההתנסות הקודמת עם מספרים דו- ספרתיים, מניחים שמספרים תלת- ספרתיים שהם בעלי אותו הפרש בין ספרת המאות לספרת האחדות (למשל הפרש של 2, כגון במספרים 200, 472) הם גם בעלי אותו הפרש בין המספר למספר הרשום בסדר ספרות הפוך (2 – 200 = 274 – 472).

מכאן מגיעים להכללה לגבי כלל המספרים התלת-ספרתיים.

4. מסמנים ב- x את ספרת האחדות, ב- a את ספרת העשרות וב- $x + k$ את ספרת המאות (x, a מספרים שלמים $0 \le a \le 9$, $0 \le x \le 9 - k$)

המספר הוא $100(x + k) + 10a + x$

המספר הכתוב בסדר ספרות הפוך הוא $100x + 10a + (x + k)$

ההפרש בין המספר המקורי למספר הכתוב בסדר ספרות הפוך

$$100(x + k) + 10a + x – (100x + 10a + x + k) = 99k$$

מסקנה: ההפרש בין מספר תלת- ספרתי לבין מספר בו אותן הספרות כתובות בסדר ספרות הפוך הוא פי 99 מההפרש בין ספרת המאות לספרת האחדות.

5. א. מחשבים את ההפרשים על-סמך המסקנות מהמשימות הקודמות:

$583 – 385 = 2·99 = 200 – 2 = 198$ $\quad$ $72 – 27 = 9·5 = 45$

$732 – 237 = 5·99 = 500 – 5 = 495$ $\quad$ $291 – 192 = 1·99 = 99$

ב. הפרש המספרים שיוצרים הכדורגלנים $825 – 528 = 3·99 = 300 – 3 = 297$

6. מסמנים ב- x את ספרת האחדות, ב- y את ספרת העשרות וב- z את ספרת המאות (x, y, z מספרים שלמים $1 \le z \le 9$, $0 \le x, y \le 9$).

בונים משוואה לפי החלק הראשון בשאלה $100z + 10y + x + 9 = 100z + 10x + y$

ולאחר פישוט $x = y + 1$ (1)

בונים משוואה לפי החלק השני בשאלה $100z + 10y + x + 90 = 100y + 10z + x$

ולאחר פישוט $y = z + 1$ (2)

על ידי הצבת משוואה (2) ב- (1) מקבלים, $x = z + 2$

מחשבים את ההפרש המבוקש בשאלה, ומציבים במקום x, y את הביטויים $z + 1$, $z + 2$ בהתאמה

$$100z + 10(z + 1) + (z + 2) – [(100(z + 2) + 10(z + 1) + z)] = 198$$

כלומר, אם נחליף בין ספרת האחדות ובין ספרת המאות, המספר יגדל ב- 198.

שומרים על כושר

1. א. בפלינדרום תלת-ספרתי ספרת המאות זהה לספרת האחדות.

בונים את המשוואה הבאה $3x – 6 = x + 4$

ופותרים $x = 5$

הפלינדרום הוא 949

ב. בפלינדרום ארבע-ספרתי ספרת האלפים זהה לספרת האחדות — $3x + 1 = y + 2$

ספרת המאות זהה לספרת העשרות — $7x - 11 = 2y - 7$

פותרים את מערכת המשוואות שהתקבלה — $x = 2, y = 5$

הפלינדרום הוא — 7337

2. א. המשוואה $3k - n$.

בוחרים ערך כלשהו עבור k, למשל — $k = 2$

מקבלים משוואה במשתנה אחד — $6 - n = 10$

ופותרים — $n = -4$

דוגמאות נוספות: (1, -7), (5, 5), (-2.5, -17.5).

ב. המשוואה $\frac{2k+4n}{2}$.

בוחרים ערך כלשהו עבור n, למשל — $n = 2$

מקבלים משוואה במשתנה אחד — $\frac{2k+8}{2} = 10$

ופותרים — $k = 6$

דוגמאות נוספות: (1, 8), $(3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3})$, (-2, 6).

ג. המשוואה $k^2 - 2n$.

בוחרים ערך כלשהו עבור k, למשל — $k = 4$

מקבלים משוואה במשתנה אחד — $16 - 2n = 10$

ופותרים — $n = 3$

דוגמאות נוספות: (1, –4.5), (–1, –4.5), (5, 7.5).

3. א. נכון. למשל, על ידי ההצבה $n = 10$, $k = 3$.

ב. לא נכון. התוצאות המתקבלות הן מספרים זוגיים.

ג. נכון. כדי לקבל מספר זוגי 2m (m שלם חיובי וגדול מ- 2) מציבים $n = 1$, $k = m - 2$.

ד. לא נכון. אם מציבים, למשל, $n = 2, k = 1$ התוצאה המתקבלת היא 10 והיא אינה מתחלקת ב- 6.

ה. לא נכון. בהצבת מספר אי-זוגי כלשהו עבור k, תתקבל תוצאה שאינה מתחלקת ב- 4.

ו. נכון. ביטוי שקול לביטוי הנתון הוא $2 \cdot (2n + k)$.

למסיימים

1. מצאו מספר ארבע-ספרתי שאם ספרת האחדות שלו תתחלף עם ספרת האלפים המספר יגדל ב- 1998.
מצאו מספרים נוספים המקיימים תכונה זו.

2. מצאו זוג של מספרים ארבע-ספרתיים, הרשומים עם אותן ספרות אך בסדר הפוך, שההפרש ביניהם הוא 1998.
מצאו זוגות נוספים של מספרים המקיימים תכונה זו.

3. סכום הספרות במספר דו ספרתי הוא 13. אם נוסיף 27 נקבל מספר הכתוב באותן ספרות אך בסדר הפוך.
איזה מספר (או מספרים) מקיימים תנאים אלו?

תשובות:

1. מספרים ארבע-ספרתיים שההפרש בין ספרת האחדות לספרת האלפים הוא 2.
לדוגמה: 1998 = 1453 – 3451, 1998 = 5467 – 7465.
ניתן להגיע למסקנה זו, על-ידי הכללה אינטואיטיבית מהמקרים של מספרים דו-ספרתיים ותלת-ספרתיים (משימות 1-4 בפעילות) למקרה של מספרים ארבע-ספרתיים. אם שמים לב לכך ש- $1998 = 2\cdot999$ או למקרה הקצה $1998 = 2 – 2000$ אפשר להסיק מסקנה זו.

2. מספרים ארבע-ספרתיים שההפרש בין ספרת האחדות לספרת האלפים הוא 2, אך שספרת העשרות והמאות שלהם זהה. לדוגמה: 1998 = 6338 – 8336, 1998 = 5447 – 7445.

3. ההפרש בין שני המספרים הוא $27=3\cdot9$. לפי המסקנות בפעילות זו נובע מכאן שההפרש בין ספרת העשרות לבין ספרת האחדות הוא 3.
מבין זוגות הספרות שסכומם 13, רק בזוג המספרים 5,8 ההפרש הוא 3. לכן המספר המתאים הוא 58.
הערה: אפשר לפתור את המשימה גם בדרך אלגברית, שאינה מסורבלת במקרה זה.

לסיכום

- סיכום התכונות בפעילות והכללתן:
  - ההפרש בין זוג מספרים דו-ספרתיים בהן ספרת האחדות התחלפה עם ספרת העשרות הוא כפולה של 9.
  - ההפרש בין זוג מספרים תלת-ספרתיים בהן ספרת האחדות התחלפה עם ספרת המאות הוא כפולה של 99.

  מבררים כיצד מתבטאת באופן אלגברי התלות של תכונה זו בהפרש הספרות הקיצוניות (k) ולא בערך הספרות (*הביטוי המתאים להפרש בין המספר למספר ההפוך הוא 9k או 99k בהתאמה*)

- משימה 1 בפעילות היא משימה בעלת פתרונות מרובים. מבקשים מהתלמידים לחבר משימות נוספות בעלות פתרונות מרובים הדומות למשימה 1, תוך שימוש בתכונות המספרים הנזכרות לעיל.

- דנים ביתרונות ובחסרונות של דרכי פתרון שונות לבעיות במהלך הפעילות
  - ניסוי וטעייה, חיפוש שיטתי בטבלה (*מאפשרים להגיע יותר בקלות להשערות והכללות, יותר אינטואיטיביים*)
  - כלים אלגבריים (*מאפשרים להצדיק טענות ולהראות כי אין פתרונות נוספים*)
  - שיקולים של תכונות מספרים (*מבהירים סיבות לתופעות המספריות*).