

4.6 מספרים מצולעים



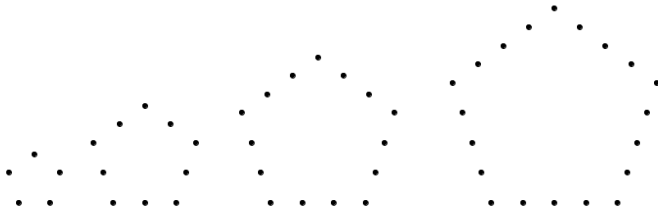
- הכרת המספרים המצולעים והבנת הקשר בין גיאומטריה לאריתמטיקה על- ידי הצגת מספרים בעזרת נקודות המסודרות כצורות גיאומטריות
- גילוי חוקיות במספרים מצולעים שונים באמצעות חקר הקשרים בין המספרים בסדרה המתקבלת או באמצעות מבנה הצורות הגיאומטריות
- הכללת חוקיות באמצעות נוסחת נסיגה או נוסחה לפי מקום.



גיליון אלקטרוני (למשל, Excel).



מציגים לתלמידים את הבעייה הבאה העוסקת במציאת חוקיות בסדרה.
נתונה סדרת מחומשים:



א. ציירו את המחומש במקום החמישי

ב. מלאו את הטבלה הבאה והכלילו את החוקיות:

מקום בסדרה	1	2	3	4	5	10	17	n
מספר הנקודות								

מסבירים את המונחים כלל נסיגה ונוסחה לפי מקום:

כלל נסיגה הוא כלל המאפשר למצוא את ערכו של מספר בסדרה על פי המספר הקודם לו

נוסחה לפי מקום מאפשרת לחשב מספר בסדרה על פי הערך של מקומו, מבלי להיעזר במספרים הקודמים לו בסדרה.

ממלאים עם התלמידים את המספרים המשולשים שבמשימה 1.

תשובות:

n	17	10	5	4	3	2	1	מקום בסדרה
5n	85	50	25	20	15	10	5	מספר הנקודות

כלל נסיגה: מספר הנקודות במחומש מסויים גדול ב-5 ממספר הנקודות במחומש הקודם לו.
 נוסחה לפי מקום: מספר הנקודות במחומש הנמצא במקום ה-n הינו $5n$. ניתן להגיע לנוסחה זו על פי המספרים הרשומים בטבלה או על פי המבנה הגיאומטרי (מקיפים את הנקודות בכל צלע של המחומש, ומקבלים 5 צלעות בעלות n נקודות).



פעילות זו כוללת חקר של סדרות, וגילוי החוקיות בטבלה אפשרי בשני כיוונים:
 - בכיוון האופקי: משלימים את החוקיות של כל סדרת מספרים מצולעים (למשל, המספרים המשולשים), וזהו הכיוון הנפוץ בהקשר לגילוי חוקיות.
 - בכיוון האנכי: משלימים את החוקיות של המקומות (למשל, המספרים הנמצאים במקום השלישי), כלומר, גילוי החוקיות של סדרת מספרים מצולעים שונים הנמצאים באותו מקום בסדרה.
 משימות 1-4 עוסקות בחוקיות בכיוון האופקי המוכרת לתלמידים ממשימות קודמות.
 משימות 5-6 עוסקות בגילוי החוקיות בכיוון האנכי. יש להיות ערים לבלבול שעשוי להיווצר בשל ההרגל של התלמידים לגלות חוקיות בכיוון האופקי.

1. מספרים משולשים
2. מספרים ריבועיים
3. מספרים מחומשים
4. מספרים משושים
5. מספרים מצולעים

א-ג. נוסחאות נסיגה מתאימות לתאים B7 – G7:

	A	B	C	D	E	F	G
1	מספר הצלעות במצולע	ראשון	שני	שלישי	רביעי	חמישי	שישי
⋮							
6	7	1	7	18	34	55	81
7	8	1	=C6+1	=D6+3	=E6+6	=F6+10	=G6+15

נוסחאות לפי מקום מתאימות לתאים B7 – G7:

	A	B	C	D	E	F	G
1	מספר הצלעות במצולע	ראשון	שני	שלישי	רביעי	חמישי	שישי
7	8	1	=A7	=3*A7-3	=6*A7-8	=10*A7-15	=15*A7-24

מגיעים לנוסחאות הנסיגה ולנוסחאות לפי מקום על סמך ששת המספרים הראשונים בכל עמודה, וממשיכים למלא את הטבלה באמצעות גרירה אנכית של נוסחאות אלו.

הערה: יש לוודא שבעת גרירת תא B7, המספר 1 נשאר קבוע לאורך כל עמודה B.

הטבלה המלאה עד המספרים של מצולע בעל 15 צלעות:

	A	B	C	D	E	F	G
1	מספר הצלעות במצולע	ראשון	שני	שלישי	רביעי	חמישי	שישי
2	3	1	3	6	10	15	21
3	4	1	4	9	16	25	36
4	5	1	5	12	22	35	51
5	6	1	6	15	28	45	66
6	7	1	7	18	34	55	81
7	8	1	8	21	40	65	96
8	9	1	9	24	46	75	111
9	10	1	10	27	52	85	126
10	11	1	11	30	58	95	141
11	12	1	12	33	64	105	156
12	13	1	13	36	70	115	171
13	14	1	14	39	76	125	186
14	15	1	15	42	82	135	201

ד. ביטויים אלגבריים מתאימים (הסבר למציאת ביטויים אלו ניתן במדריך למשימה 6):

	ראשון	שני	שלישי	רביעי	חמישי	שישי
מצולע בעל k צלעות	1	k	$3k - 3$	$6k - 8$	$10k - 15$	$15k - 24$

6. מספרים מצולעים

שלב \ סוג	ראשון	שני	שלישי	רביעי	חמישי	שישי
משולש	1	3	6	10	15	21
ריבועי	1	4	9	16	25	36
מחומש	1	5	12	22	35	51
משושה	1	6	15	28	45	66
משובע	1	7	18	34	55	81
מתומן	1	8	21	40	65	96
מצולע בעל 9 צלעות	1	9	24	46	75	111
מצולע בעל 15 צלעות	1	15	42	82	135	201
מצולע בעל k צלעות	1	k	$3k - 3$	$6k - 8$	$10k - 15$	$15k - 24$

מציאת נוסחה למצולע בעל k צלעות בעמודה השלישית:

-יוצאים מן המספר המשולש השלישי (6),

-מגיעים אל המצולע ה- k (במקום השלישי) לאחר k

(3 – דילוגים בגודל 3,

$$6 + (k-3) \cdot 3$$

\uparrow \uparrow
 המספר הראשון מספר הדילוגים עד k גודל הדילוג

$$3k - 3$$

ולאחר פישוט,

באופן דומה משלימים את שאר הנוסחאות:

$$10 + (k - 3) \cdot 6 = 6k - 8$$

נוסחה למצולע בעל k צלעות בעמודה הרביעית:

$$15 + (k - 3) \cdot 10 = 10k - 15$$

נוסחה למצולע בעל k צלעות בעמודה החמישית:

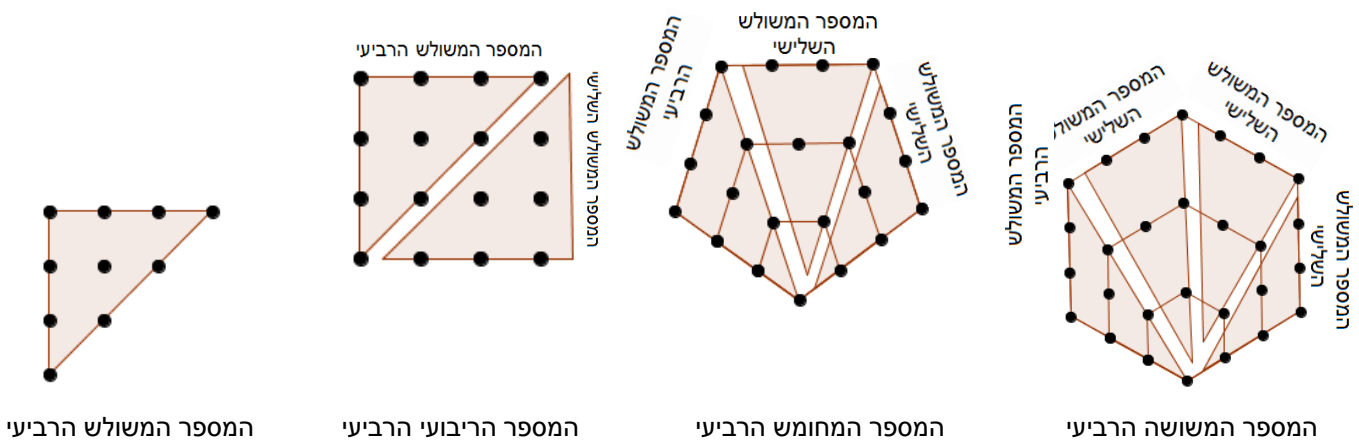
$$21 + (k - 3) \cdot 15 = 15k - 24$$

נוסחה למצולע בעל k צלעות בעמודה השישית:

הסבר גיאומטרי להפרש הקבוע (בסדרות בכיוון האנכי של הטבלה)

ההפרש הקבוע בכל עמודה בטבלה הוא המספר המשולש שבסדרה הקודמת. ניתן להסביר הפרש זה באמצעות המבנה הגיאומטרי של הצורות.

למשל, בסדרת המספרים שבמקום הרביעי ההפרש הקבוע הוא המספר המשולש השלישי:



תכונה של מספרים ריבועיים: המספר הריבועי במקום ה- n שווה לסכום המספרים האי-זוגיים מ-1 ועד המספר האי-זוגי במקום ה-n.

קשר בין המספרים המשולשים והמספרים הריבועיים: המספר הריבועי במקום ה- n שווה לסכום המספרים המשולשים במקום ה- n ובמקום ה- (n-1).



1. א.

	ראשון	שני	שלישי	רביעי	חמישי	שישי
מספרים צלופחיים	13	16	19	22	25	28

ב. 40 נמצא במקום ה-10, 181 במקום ה-57, 1,066 במקום ה-352.

2. ניתן להיעזר באסטרטגיה הבאה לבניית דוגמאות: מציבים 1 בביטוי הנתון באגף שמאל של המשוואה, ויוצרים ביטוי אחר שהצבת 1 יוצרת גם בו אותה תוצאה.

א. דוגמאות: $2x - 5 = 4x - 7$, $2x - 5 = \frac{3x+7-8x}{4} - 3.5$, $2x - 5 = x^2 - 4$

ב. דוגמאות: $2 \cdot (2x - 5) = 2 \cdot (4x - 7)$, $2(2x - 5) = 3x - 4 - \frac{4x+21}{5}$

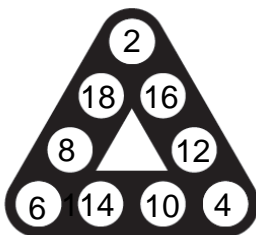
ג. דוגמאות: $2x - 5 = 2x - 7 + 2x$, $2x - 5 = 2x - 6 + x^2$

3. א. דוגמאות: $4x + x$, $7x + 4 - 3x - 3$, $2 \cdot (2x^2 + 0.5x)$

ב. דוגמאות: $6x + 1$, $7 \cdot \frac{2x-7+4x+5}{2}$, $(x+6)^2$

ג. דוגמאות: $12x$, $4(2x-7) - (2x-7)$, $x(x+1)(x+2)$

ד. דוגמאות: $-7x$, $3x - 7 - 5x + 2$, $-x^2$



ניתן להקל את רמת הקושי בחידה, אם משבצים את המספרים 1-9, כך שהסכום בכל צלע הינו 17.

לקבלת פתרון לחידה כופלים את המספרים ששובצו בעיגולים ב-2.



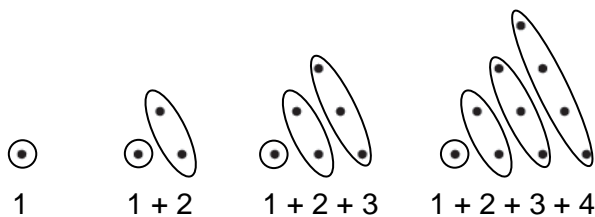
1. א. השלימו מספרים משולשים נוספים בטבלה.

ב. השלימו מספרים ריבועיים נוספים בטבלה.

2. המשיכו למלא את הטבלה לעמודות נוספות, כלומר, המספר השביעי, השמיני וכן הלאה בכל סדרת מצולעים.

תשובות:

1. א. מפרקים את המבנה של מספר משולש לסכומים של מספרים טבעיים.



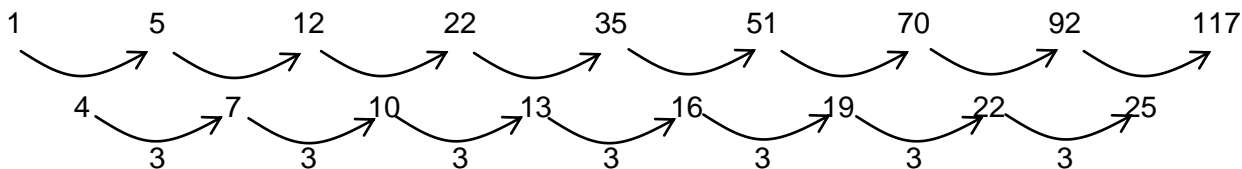
$1 + 2 + 3 + \dots + n$

מכלילים שמספר הנקודות במספר המשולש ה- n הינו

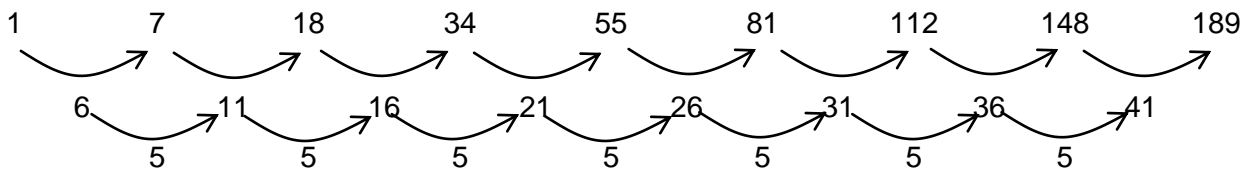
ב. המספרים המצולעים הריבועיים הם למעשה סדרת המספרים הריבועיים (n^2). המספר הריבועי השביעי הינו $7^2 = 49$, השמיני - $8^2 = 64$, התשיעי - $9^2 = 81$, וכן הלאה.

2. השלמת השורות באמצעות כלל נסיגה

מאפיינים את החוקיות של הדילוגים מתא לתא באותה שורה, וממשיכים על פי חוקיות זו. למשל, אפיון החוקיות במספרים המחומשים:



אפיון החוקיות במספרים המשובעים:



למעשה, בכל סדרה בכיוון האופקי בטבלה (כלומר, סדרה מתאימה למצולע כלשהו) סדרת הפרשי הפרשים היא קבועה, וניתן להשתמש במאפיין זה כדי להשלים את המספרים בטבלה בכיוון האופקי!

השלמת העמודות במספרים המשולשים

כל סדרה בכיוון האנכי של הטבלה היא סדרה בהפרשים קבועים - כאשר גודל הפרש הוא המספר המשולש שבמקום הקודם.

לדוגמה, השלמת העמודה השביעית:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

המספר המשולש השביעי הוא

21

הפרש הסדרה הוא המספר המשולש השישי, כלומר,

להשלמת המספרים בעמודה, מתחילים מהמספר המשולש (28) ומוסיפים לו שוב ושוב את הפרש הסדרה (21).

$28 + (k - 3) \cdot 21$

מוצאים נוסחה למצולע בעל k צלעות בעמודה השביעית (ראו הסבר למשימה 6):



הצעות לדיון מסכם:

• דרכים למילוי הסדרות בטבלה בכיוון האנכי (משימות 5-6)

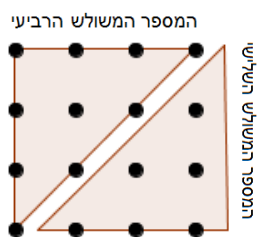
-כלל נסיגה: מציאת מספר כלשהו בסדרה על-ידי מציאת כל המספרים שלפניו.

-נוסחה לפי מקום: חישוב ישיר של מספר מסוים בסדרה על-פי הערך של מקומו, מבלי לחשב את המספרים הקודמים לו בסדרה.

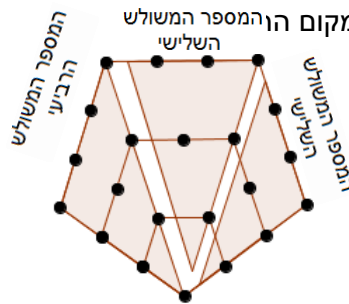
• קשרים בין סוגי המספרים המצולעים:

-הפרש הסדרה בסדרות בכיוון האנכי הוא המספר המשולש הנמצא במקום אחד לפניו.

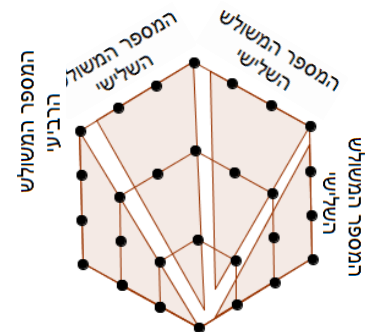
לדוגמה, סדרת המספרים שבמקום ה- n היא:



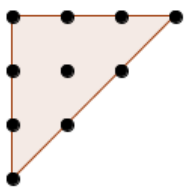
המספר הריבועי הרביעי



המספר המחומש הרביעי



המספר המשושה הרביעי



המספר המשולש הרביעי