

4.3 מספרים עוקבים 1



- גילוי, הכללה והנמקה של חוקיות
- שימוש באלגברה להוכחת חוקיות
- פישוט ביטויים אלגבריים
- שימוש במושגים בסיסיים הקשורים לתכונות מספרים
- דיון והשוואה בין דרכי פתרון שונות



גיליון אלקטרוני (למשל, Excel).



בודקים את השוויונות שבמסגרת.



1. א. במילים: בכל רביעייה של מספרים עוקבים, סכומם שווה להפרש בין מכפלת של שני המספרים הגדולים יותר לבין מכפלת שני המספרים הקטנים יותר.

בכתיב מתמטי: מייצגים רביעייה של מספרים עוקבים כך: $x, x + 1, x + 2, x + 3$

החוקיות היא: $(x + 3)(x + 2) - (x + 1)x = (x + 3) + (x + 2) + (x + 1) + x$

ב. $60 \cdot 59 - 58 \cdot 57 = 60 + 59 + 58 + 57$ $18 \cdot 17 - 16 \cdot 15 = 18 + 17 + 16 + 15$

$21 \cdot 20 - 19 \cdot 18 = 21 + 20 + 19 + 18$

ד. מסמנים ב- x את המספר הקטן.

ארבעת המספרים הם $x, x + 1, x + 2, x + 3$

סכום המספרים הוא $4x + 6$

ביטוי אלגברי להפרש המכפלות הוא $(x + 3)(x + 2) - (x + 1)x$

מפשטים את הביטוי ומקבלים $4x + 6$

התקבלו ביטויים שווים ולכן המסקנה נכונה.

2. דרך אלגברית

מסמנים ב- x את המספר הקטן מבין ארבעת המספרים העוקבים.

$4x + 6$	סכום ארבעת המספרים העוקבים הוא
$4x + 6 = 250$	בונים את המשוואה
$x = 61$	ופתרונה הוא
61, 62, 63, 64	ולכן המספרים הם

דרך אריתמטית

$250 : 4 = 62.5$	מחשבים את ממוצע ארבעת המספרים
61, 62, 63, 64	מאחר שזהו ממוצע של ארבעה מספרים עוקבים, המספרים הם

3. א. המספרים הם: $22 = 4 + 5 + 6 + 7$ $26 = 5 + 6 + 7 + 8$

ב. רון צודק שהסכום חייב להיות זוגי כי בכל ארבעה מספרים עוקבים חייבים להופיע שני מספרים זוגיים ושני מספרים אי זוגיים ולכן הסכום כולו זוגי (סכום שני מספרים אי זוגיים הוא זוגי).

אולם, הוא אינו צודק בכך שכל מספר זוגי ניתן לכתובה כסכום של ארבעה מספרים עוקבים

הסבר: אם x מסמן את המספר הקטן, אז $4x + 6$ מייצג את הסכום של ארבעת המספרים העוקבים. נוכל להסיק כי הסכום מתחלק ב-4 עם שארית 2. כלומר, המספרים היחידים שיכולים לשמש כסכום של ארבעה מספרים עוקבים (וגם כהפרש המכפלות שלהם) הם המספרים הזוגיים שאינם מתחלקים ב-4.

ג. 252 אינו סכום של ארבעה מספרים עוקבים מאחר שהוא מתחלק ב-4.

4. א, ב. דרך אלגברית

פותרים את המשוואה באמצעות פישוט אלגברי ומקבלים $x = 13$

באמצעות החוקיות שבפעילות

הביטוי האלגברי שבמשוואה הוא הפרש מכפלה של ארבעה מספרים עוקבים על פי החוקיות שמתוארת בפעילות, כאשר x מייצג את המספר הגדול.

על פי הקשר שבפעילות הסכום של ארבעת המספרים העוקבים הוא גם כן 46.

ארבעת המספרים העוקבים שסכומם 46 הם: 10, 11, 12, 13.

ולכן $x = 13$.

5. באמצעות החוקיות שבפעילות

במשימה 3 במדריך למורה ראינו כי המספרים היחידים שיכולים לשמש כסכום ארבעה מספרים עוקבים (וגם כהפרש המכפלות שלהם) הם המספרים הזוגיים שאינם מתחלקים ב-4.

לכן, המספרים היחידים שניתן לכתוב אותם כהפרש מכפלות של ארבעה מספרים עוקבים הם 102 ו-1006.

ואכן, $1006 = 253 \cdot 252 - 251 \cdot 250 = 250 + 251 + 252 + 253$

$102 = 27 \cdot 26 - 25 \cdot 24 = 24 + 25 + 26 + 27$

דרך אלגברית

אם x מסמן את המספר הקטן אז הביטוי להפרש המכפלות של ארבעה מספרים עוקבים הוא $4x + 6$.

פותרים את המשוואות הבאות ומוצאים מתי הפתרון מספר שלם:

$$4x + 6 = 51 \Rightarrow x = 11.25$$

$$4x + 6 = 100 \Rightarrow x = 23.5$$

$$4x + 6 = 102 \Rightarrow x = 24$$

$$4x + 6 = 1006 \Rightarrow x = 250$$



6. מסמנים ב- x את המספר הקטן.

$$x, x + 2, x + 4, x + 6$$

ארבעת המספרים של הסדרה הם

$$(x + 6) + (x + 4) + (x + 2) + x = 4x + 12$$

סכומם הוא

$$(x + 6)(x + 4) - (x + 2)x = 8x + 24$$

והפרש המכפלות הוא

$$2(4x + 12) = 8x + 24$$

מסיקים כי הפרש המכפלות הוא פי 2 מהסכום,

$$(x + 6)(x + 4) - (x + 2)x = 2 \cdot [(x + 6) + (x + 4) + (x + 2) + x]$$

כלומר,

במילים: בכל רביעייה של מספרים בדילוגים של 2 זה מזה, ההפרש בין מכפלת שני המספרים הגדולים יותר למכפלת שני המספרים הקטנים יותר גדול פי 2 מסכום ארבעת המספרים.



7. א. במילים: בכל רביעייה של מספרים בדילוגים של n זה מזה, ההפרש בין מכפלת שני המספרים הגדולים יותר

למכפלת שני המספרים הקטנים יותר גדול פי n מסכום ארבעת המספרים.

מסמנים ב- x את המספר הקטן.

$$x, x + n, x + 2n, x + 3n$$

ארבעת המספרים של הסדרה הם

$$(x + 3n) + (x + 2n) + (x + n) + x = 4x + 6n$$

סכומם הוא

$$(x + 3n)(x + 2n) - (x + n)x = 4nx + 6n^2$$

והפרש המכפלות הוא

$$n(4x + 6n) = 4nx + 6n^2$$

מסיקים כי הפרש המכפלות הוא פי n מהסכום,

$$(x + 3n)(x + 2n) - (x + n)x = n \cdot [(x + 3n) + (x + 2n) + (x + n) + x]$$

כלומר,

הערה: את החוקיות מגלים התלמידים באמצעות הדוגמאות המתקבלות באמצעות הגיליון האלקטרוני:

אין צורך להצדיק את החוקיות באופן אלגברי עם התלמידים



1.

.	$x + 4$	$x - 5$	$x + 6$	$x + 2$
$x - 2$	$x^2 + 2x - 8$	$x^2 - 7x + 10$	$x^2 + 4x - 12$	$x^2 - 4$
$x + 3$	$x^2 + 7x + 12$	$x^2 - 2x - 15$	$x^2 + 9x + 18$	$x^2 + 5x + 6$
$x + 6$	$x^2 + 10x + 24$	$x^2 + x - 30$	$x^2 + 12x + 36$	$x^2 + 8x + 12$
$x - 10$	$x^2 - 6x - 40$	$x^2 - 15x + 50$	$x^2 - 4x - 60$	$x^2 - 8x - 20$

2. א. רביעייה ימנית: $(x + 3)(x + 2) - (x + 1)x = 4x + 6$

רביעייה אמצעית: $(2x - 2)(2x - 3) - (2x - 4)(2x - 5) = 8x - 14$

רביעייה שמאלית: $(3x + 2)(3x + 1) - 3x(3x - 1) = 12x + 2$

ב. באמצעות החוקיות בפעילות

המכפלות המבוקשות בסעיף א, מתארות הפרש מכפלות בין ארבעה מספרים עוקבים על פי החוקיות המתוארת בפעילות. בהתאם למסקנה בפעילות זו, הפרש המכפלות שווה לסכום ארבעת המספרים העוקבים, ולכן כדי למצוא את ההפרש בין מכפלות האלכסונים בריבוע מחשבים את סכום ארבעת הביטויים בריבוע.

רביעייה ימנית: $(x + 3) + (x + 2) + (x + 1) + x = 4x + 6$

רביעייה אמצעית: $(2x - 2) + (2x - 3) + (2x - 4) + (2x - 5) = 8x - 14$

רביעייה שמאלית: $(3x + 2) + (3x + 1) + 3x + (3x - 1) = 12x + 2$

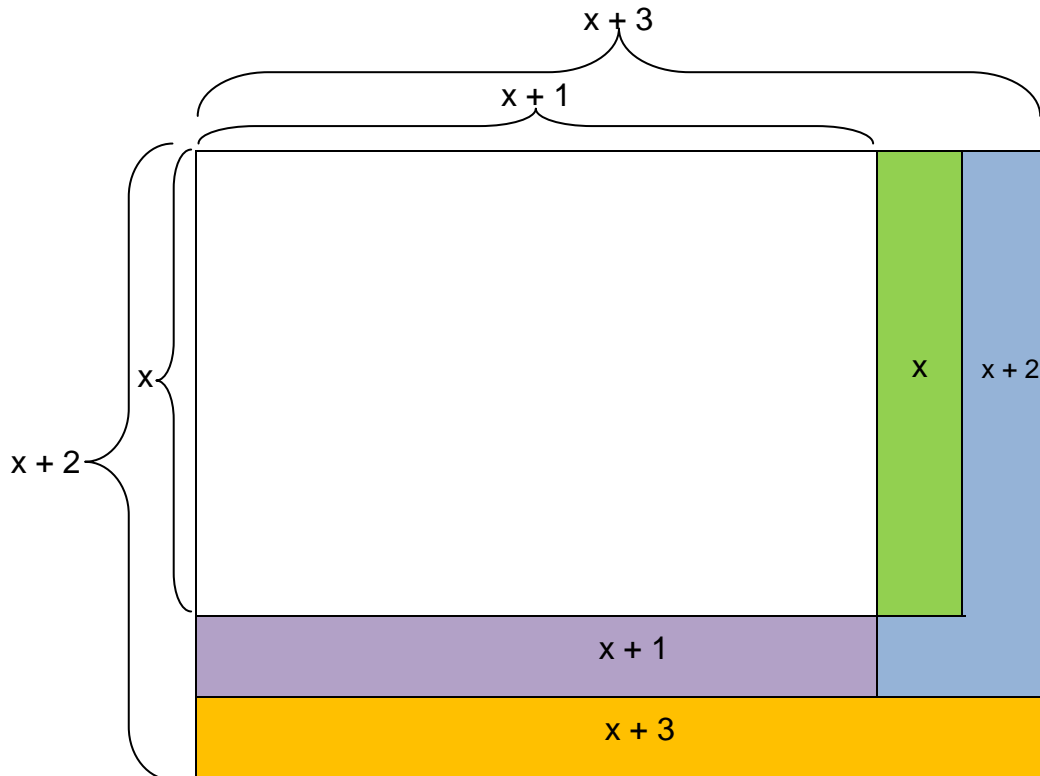


ההפרש בין שני הסכומים יהיה 500.

$$\begin{array}{r} 2 + 4 + 6 + \dots + 1000 \\ - 1 + 3 + 5 + \dots + 999 \\ \hline 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \end{array}$$

מעלים הצעות להוכחות נוספות לחוקיות ולתכונות נוספות המופיעות בפעילות

- הוכחה גיאומטרית לחוקיות שבפעילות מחסירים משטח מלבן בגודל $(x + 3) \times (x + 2)$ את שטחו של מלבן בגודל $(x) \times (x + 1)$. השטח הנותר הוא סכום של ארבעה מצולעים ששטחיהם הם $x, x + 1, x + 2, x + 3$.



- הצדקה נוספת לתכונה כי סכום ארבעה מספרים עוקבים הוא מספר זוגי שאינו מתחלק ב-4: סכום רביעיית המספרים העוקבים הראשונה מ-1 ועד 4 הוא $10 (= 1 + 2 + 3 + 4)$, וזהו מספר זוגי שאינו מתחלק ב-4. סכום סדרת רביעיית המספרים העוקבים הבאה מ-2 ועד 5 גדול ב-4 מסכום הרביעייה הראשונה, וכך הלאה – סכום כל רביעייה גדול ב-4 מסכום הרביעייה שלפניה. הסבר: סכום הרביעייה $x, x + 1, x + 2, x + 3$ גדול ב-4 מסכום הרביעייה הקודמת לה $x - 1, x, x + 1, x + 2$ (כי במעבר בין הרביעיות, הורדנו מן הרביעייה הקודמת את $(x - 1)$ והוספנו לה את $(x + 3)$). מכיוון שסדרת הסכומים היא סדרה בדילוגים של 4, כל המספרים בסדרה הם בעלי אותה שארית בחילוק ב-4 (במקרה שלנו, שארית 2).