

4.2 העוגות של שמיל



- גיאומטריה:
 - הכרת מבנה הקובייה
 - התנסות במושגים הקשורים לנפח ושטח פנים
 - הכרת שינויי נפח הנובעים משינוי מידותיה של קובייה
- פיתוח חשיבה חזותית
- מציאת שיטות ספירה
- הכללה וחוקיות אלגברית של ביטויים ממעלה ראשונה, שנייה ושלישית
- השוואה בין קצבי גידול שונים
- קישור בין ייצוגים שונים – מילולי, גיאומטרי, אלגברי וגרפי.



גיליון אלקטרוני (למשל, Excel).
עותקים משוכפלים של הטבלה במשימה 1.



חוזרים על המרכיבים והמבנה של הקובייה (8 קודקודים, 12 מקצועות ו-6 פאות).
מתחילים במילוי הטבלה שבמשימה 1.



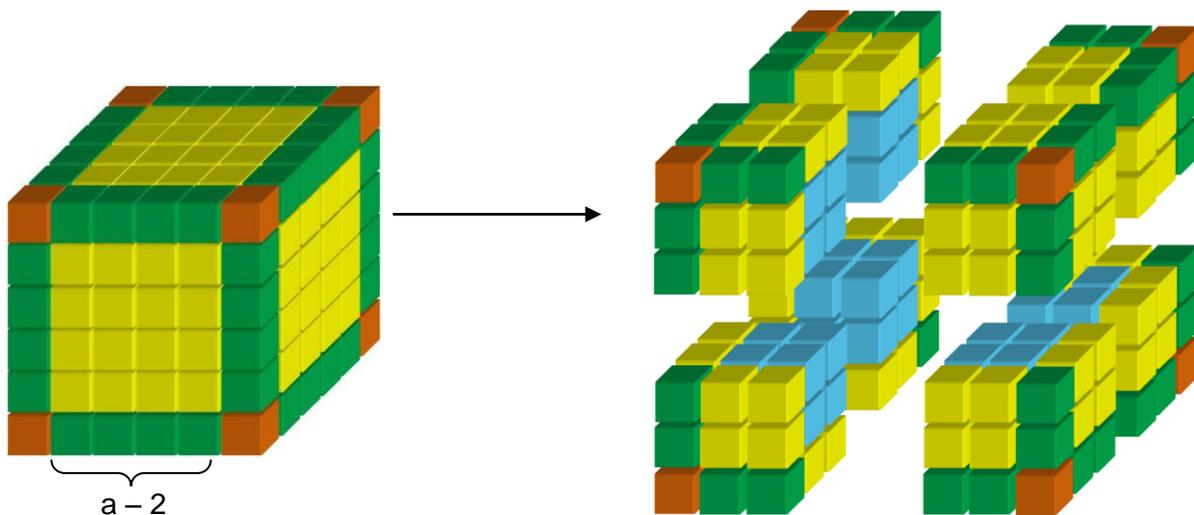
בכיתות הלומדות עם מחשבים, מומלץ להקדים את משימה 3 ("פינת המחשב") לפני משימה 2, ובנוסף לבקש במשימה 3 לשרטט גם את הגרפים לקוביות מסוגים שונים (בדומה לגרפים המוצגים במשימה 2).

1. א.ב. להלן הטבלה המלאה:

גודל העוגה	סה"כ מס' קוביות בעוגה	מס' קוביות עם 3 פאות מצופות	מס' קוביות עם 2 פאות מצופות	מס' קוביות עם פאה אחת מצופה	מס' קוביות שאינן מצופות כלל
$2 \times 2 \times 2$	8	8	0	0	0
$3 \times 3 \times 3$	27	8	12	6	1
$4 \times 4 \times 4$	64	8	24	24	8
$5 \times 5 \times 5$	125	8	36	54	27
$10 \times 10 \times 10$	1000	8	96	384	512
$a \times a \times a$	a^3	8	$12(a - 2)$	$6(a - 2)^2$	$(a - 2)^3$

מוצאים את מספר הקוביות מכל סוג מתוך ניתוח של מבנה הקובייה. מוודאים שסופרים את כל הקוביות מאותו סוג ולא סופרים פעמיים אותה קובייה.

קוביות עם 3 פאות מצופות	קוביות עם 2 פאות מצופות	קוביות עם פאה אחת מצופה	קוביות שאינן מצופות כלל
8	$12(a - 2)$	$6(a - 2)^2$	$(a - 2)^3$
הקוביות המונחות ב- 8 הפינות. מספרן אינו תלוי בגודל הקובייה.	הקוביות המונחות לאורך 12 המקצועות ואינן בפינות. על כל מקצוע מונחות $(a - 2)$ קוביות כאלה.	הקוביות המונחות על 6 הפאות ואינן מונחות לאורך מקצוע או בפינה. יש 6 פאות. בכל פאה, הן מסודרות בריבוע ששטחו $(a - 2)^2$.	הקוביות הפנימיות הנחשפות אם מורידים את הקוביות החיצוניות המצופות. הן מסודרות בקובייה שנפחה $(a - 2)^3$



ייתכן שתלמידים ימלאו את הטבלה באמצעות שיטות הכללה מספריות, אולם, רצוי להוביל את התלמידים להסתמך על העיקרון הגיאומטרי (במקרה זה, מבנה הקובייה) שמאחורי החוקיות.

ג. מחברים ומפשטים את הביטויים האלגבריים:

$$(a-2)^3 + 6(a-2)^2 + 12(a-2) + 8 =$$

$$= (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) + (6a^2 - 24a + 24) + (12a - 24) + 8 = a^3$$

הערה: בשלב זה התלמידים אינם מכירים את נוסחת הכפל של $(a-b)^3$ ואין צורך להציג אותה בפני התלמידים בפעילות זו. מדריכים את התלמידים לפשט את הביטוי $(a-2)^3$ בשני שלבים:
 תחילה מפשטים את המכפלה $(a-2)(a-2) = a^2 - 4a + 4$
 ואחרי כן מפשטים את המכפלה $(a^2 - 4a + 4)(a-2) = a^3 - 6a^2 + 12a - 8$

2. א-ב. קוביות שאינן מצופות כלל: גרף IV קצב הגידול המהיר ביותר
 קוביות עם פאה אחת מצופה: גרף III
 קוביות עם 2 פאות מצופות: גרף II
 קוביות עם 3 פאות מצופות: גרף I קצב הגידול האיטי ביותר

משווים בין קצבי הגידול על פי הגרפים או על פי המספרים בטבלה
 קוביות עם 3 פאות מצופות – קצב גידול אפס, גרף של פונקציה קבועה, המספרים בטבלה קבועים.
 קוביות עם 2 פאות מצופות – קצב גידול אחיד, גרף של פונקציה קווית, דילוג קבוע בין המספרים בטבלה (12).

קוביות עם פאה אחת או שאינן מצופות כלל – קצב גידול הולך וגדל, גרף "קעור" בהסתכלות מלמעלה.
 אם רוצים, מבחינים בין שני המקרים האחרונים – קצב הגידול במקרה של הקוביות שאינן מצופות כלל, מהיר יותר מזה של הקוביות עם פאה אחת מצופה.



3. לקבלת הנתונים המספריים הדרושים, אפשר לגרור אנכית את הנוסחאות הבאות:

	A	B	C	D	E	F
	גודל העוגה (אורך צלע קובייה)	מספר הקוביות	מספר קוביות עם 3 פאות מצופות	מספר קוביות עם 2 פאות מצופות	מספר קוביות עם פאה אחת מצופה	מספר קוביות שאינן מצופות כלל
1						
2		$=A^2 \cdot 3$	$=8$	$=12 \cdot (A-2)$	$=6 \cdot (A-2)^2$	$=(A-2)^3$

הטבלה המספרית המתקבלת עד העוגה שבגודל $10 \times 10 \times 10$:

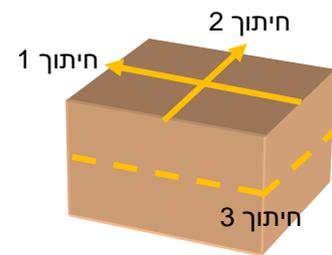
	A	B	C	D	E	F
	גודל העוגה (אורך צלע קובייה)	מספר הקוביות	מספר קוביות עם 3 פאות מצופות	מספר קוביות עם 2 פאות מצופות	מספר קוביות עם פאה אחת מצופה	מספר קוביות שאינן מצופות כלל
1						
2	2	8	8	0	0	0
3	3	27	8	12	6	1
4	4	64	8	24	24	8
5	5	125	8	36	54	27
6	6	216	8	48	96	64
7	7	343	8	60	150	125
8	8	512	8	72	216	216
9	9	729	8	84	294	343
10	10	1000	8	96	384	512



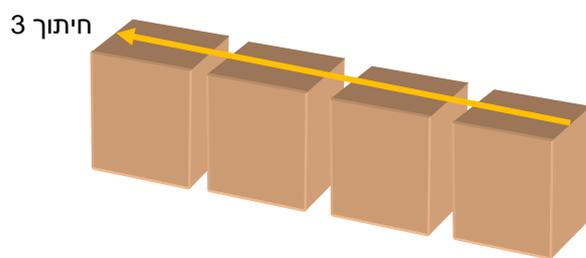
1. א. נפח: x^3 שטח פנים: $6x^2$
- ב. נפח: $5x(x+3)^2 = 5x^3 + 30x^2 + 45x$ שטח פנים: $2(x+3)^2 + 4 \cdot 5x(x+3) = 22x^2 + 72x + 18$
- ג. נפח: $12x^3 + 20x^2$ שטח פנים: $2 \cdot 2x \cdot 2x + 4 \cdot 2x \cdot (3x+5) = 32x^2 + 40x$
- ד. נפח: $3x^2 - x^2$ שטח פנים: $2x^2 + 4x(3x-1) = 14x^2 - 4x$
2. א. מידות אפשריות: $x, x, 12x^2$ $x^2, 6x, 2x$ $x^2, x^2, 12$ $1, 12, x^4$
- ב. מידות אפשריות: $x+3, 3x, x$ $9(x+3), \frac{1}{3}x, x$ $x+3, x^2, 3$ $3(x+3), x^2, 1$



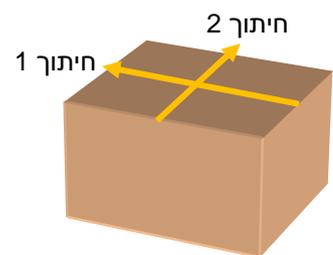
דרך א:



דרך ב:



מסדרים את ארבע החתיכות בשורה



1. בכל סעיף, רשום נתון לגבי כמות קוביות מסוג מסוים הנוצרות לאחר חיתוך עוגה בצורת קובייה. קבעו את מידות העוגה. אם הנתון שגוי, הסבירו.

א. 343 קוביות קטנות שאינן מצופות

ב. 240 קוביות קטנות עם 2 פאות מצופות

ג. 150 קוביות עם פאה אחת מצופה

ד. 10 קוביות עם 3 פאות מצופות.

תשובות: א. 343 הקוביות שאינן מצופות יוצרות קובייה בגודל $7 \times 7 \times 7$. לכן מידות העוגה השלמה הן $9 \times 9 \times 9$.

ב. פותרים את המשוואה $12(a - 2) = 240$ ומקבלים $a = 22$, או פותרים באמצעות שיקולים: לאורך כל אחת מ-12 המקצועות של העוגה יש 20 ($= 240:12$) קוביות בעלות 2 פאות. לכן מידות העוגה השלמה הן $22 \times 22 \times 22$.

ג. על כל אחת מ-6 הפאות של הקובייה מונחות 25 ($= 150:6$) קוביות עם פאה אחת מצופה, היוצרות מבנה ריבועי של 5×5 קוביות. לכן מידות העוגה השלמה הן $7 \times 7 \times 7$.

ד. אין קובייה כנדרש כי מספר הקוביות עם 3 פאות מצופות הוא תמיד 8.

הערה: ניתן לפתור את השאלות באמצעות הטבלה המספרית שנבנתה בפינת המחשב (משימה 3).

2. באחד הימים, שמיל החליט לחסוך בציפוי השוקולד ולא ציפה את תחתית העוגה לפני שחתך אותה לקוביות קטנות.

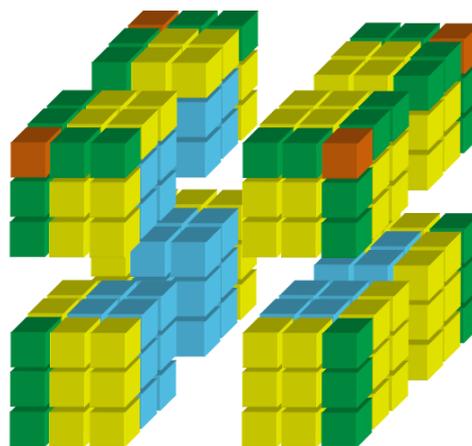
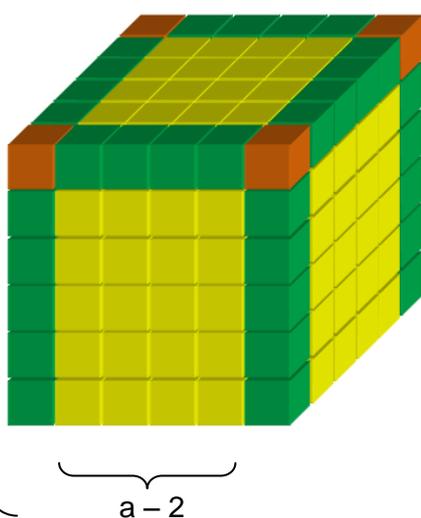
מלאו (במחברת או באמצעות המחשב) טבלה הדומה לזו שבמשימה 1 בפעילות.

תשובה:

גודל העוגה	סה"כ מס' הקוביות בעוגה	מס' קוביות עם 3 פאות מצופות	מס' קוביות עם 2 פאות מצופות	מס' קוביות עם פאה אחת מצופה	מס' קוביות שאינן מצופות כלל
$2 \times 2 \times 2$	8	4	4	0	0
$3 \times 3 \times 3$	27	4	12	9	2
$4 \times 4 \times 4$	64	4	20	28	12
$5 \times 5 \times 5$	125	4	28	57	36
$10 \times 10 \times 10$	1000	4	68	352	576
$a \times a \times a$	a^3	4	$8(a - 2) + 4$	$5(a - 2)^2 + 4(a - 2)$	$(a - 2)^2(a - 1)$

מוצאים את מספר הקוביות מכל סוג מתוך ניתוח של מבנה הקובייה. מוודאים שסופרים את כל הקוביות מאותו סוג ולא סופרים פעמיים אותה קובייה.

קוביות שאינן מצופות כלל	קוביות עם פאה אחת מצופה	קוביות עם 2 פאות מצופות	קוביות עם 3 פאות מצופות
$(a - 2)^2(a - 1)$	$5(a - 2)^2 + 4(a - 2)$	$8(a - 2) + 4$	8
הקוביות הנחשפות אם מורידים את הקוביות החיצוניות המצופות בפאה העליונה וב-4 הפאות הצדדיות. הן מסודרות בתיבה שבסיסה הוא ריבוע בגודל $(a - 2) \times (a - 2)$ וגובהה $(a - 1)$.	הקוביות המונחות על הפאה העליונה וב-4 הפאות הצדדיות ואינן מונחות לאורך מקצוע או בפינה. יש 5 פאות. בכל פאה, והן מסודרות בריבוע ששטחו $(a - 2)^2$. בנוסף, הקוביות המונחות לאורך 4 המקצועות התחתונות ואינן בפינות. על כל מקצוע מונחות $(a - 2)$ קוביות כאלה.	הקוביות המונחות לאורך 8 המקצועות שאינן תחתונות. על כל מקצוע מונחות $(a - 2)$ קוביות כאלה. בנוסף, 4 הקוביות המונחות ב-4 הפינות התחתונות.	הקוביות המונחות ב-4 הפינות העליונות. מספרן אינו תלוי בגודל הקובייה.



מזהים בין מספר הקוביות המצופות בפאה אחת ושטח פנים של קובייה, ומזהים בין מספר הקוביות שאינן מצופות כלל ובין נפח של קובייה.

משווים בין הדרכים בהן שטח הפנים והנפח של קובייה משתנים ככל שמידות הקובייה גדלות

- ייצוג בטבלה: הגידול במספרים שלאורך העמודה של הקוביות המצופות על פאה אחת (שטח פנים) איטי יותר מזה של המספרים שבעמודת הקוביות שאינן מצופות (נפח).
- ייצוג אלגברי: שטח הפנים קשור לביטוי אלגברי ממעלה שנייה, ואילו נפח הקובייה קשור לביטוי אלגברי ממעלה שלישית. עבור מספרים חיוביים הביטוי השני גדל בקצב מהיר יותר.
- ייצוג גרפי: קצב העלייה של גרף III במשימה 2 מתן יותר מזה של גרף IV.