

## יחידה 4: אלגברה במשתנה אחד

### 4.1 שלושה דייגים



- הפעלת אסטרטגיות שונות לפתרון בעיות: ניסוי וטעייה, חשיבה מהסוף להתחלה, שימוש באלגברה
- שימוש באלגברה לפתרון בעיות
- התמודדות עם סיטואציה המציבה אילוצים רבים ומאפשרת דרכי פתרון שונות
- יישום מושגים הקשורים לתכונות של מספרים (כגון: כפולות, שארית, תנאי התחלקות)
- פתרון בעיה דרך תהליך רקורסיבי.



גיליון אלקטרוני (למשל, Excel).



קוראים את הסיפור ומדגימים את התהליך: בוחרים מספר מתאים שישימש כמספר הכולל של דגים (למשל, 160) ובודקים האם הוא אפשרי בסיפור.



**1.** כפי שיתברר במשימות 2-4 לא כל מספר מתאים להיות המספר הכולל של דגים (לפני תחילת החלוקה), וכן יש יותר מאפשרות אחת למספר זה.

**2.** א. ניתן להתחיל את החלוקה עם כמות של 106 דגים.

מספר החלוקה	מבצע החלוקה	מספר הדגים שלקח הדייג לעצמו	מספר הדגים שנותר לאחר החלוקה
1.	אמנון	$106 - 1 = 105$ $105:3 = 35$	70
2.	סלומון	$70 - 1 = 69$ $69:3 = 23$	46
3.	דניס	$46 - 1 = 45$ $45:3=15$	30

כמות התחלתית
106

ב. ניתן להתחיל את החלוקה עם כמות של 133 דגים.

מספר החלוקה	מבצע החלוקה	מספר הדגים שלקח הדייג לעצמו	מספר הדגים שנותר לאחר החלוקה
1.	אמנון	$133 - 1 = 132$ $132:3 = 44$	88
2.	סלומון	$88 - 1 = 87$ $87:3 = 29$	58
3.	דניס	$58 - 1 = 57$ $57:3 = 19$	38

ג. לא ניתן להתחיל את החלוקה עם כמות של 130 דגים.

מספר החלוקה	מבצע החלוקה	מספר הדגים שלקח הדייג לעצמו	מספר הדגים שנותר לאחר החלוקה
1.	אמנון	$130 - 1 = 129$ $129:3=43$	86
2.	סלומון	$86 - 1 = 85$ $85:3=$ לא מתחלק	
3.	דניס		

3. משלימים את הטבלה מהסוף להתחלה על פי החיצים.

מספר החלוקה	מבצע החלוקה	מספר הדגים שלקח הדייג לעצמו	מספר הדגים שנותר לאחר החלוקה
1.	אמנון	$\left(\frac{3 \cdot (3x+1)}{2} + 1\right) = \frac{9x+5}{2}$	$\frac{3 \cdot (3x+1)}{2} + 1$
2.	סלומון	$\frac{3x+1}{2}$	$3x+1$
3.	דניס	$x$	$2x$

כמות התחלתית
$\frac{3 \cdot (9x+5)}{4} + 1$

4. א, ב. דרך אלגברית

הביטוי המתאר את כמות הדגים ההתחלתית הוא

$$\frac{3 \cdot (9x+5)}{4} + 1$$

כדי שתוצאת ההצבה תהיה שלמה (מספר הדגים יהיה מספר שלם) יש לבחור ערך עבור  $x$  כך שתוצאת ההצבה בביטוי הבא תהיה שלמה

$$\frac{3 \cdot (9x+5)}{4}$$

כלומר, יש לבחור ערך עבור  $x$  כך שתוצאת ההצבה בביטוי הבא תתחלק ב-4

$$9x + 5$$

$$x = 3, 7, 11, 15, \dots$$

$$x = 3$$

$$\frac{3 \cdot (9 \cdot 3 + 5)}{4} + 1 = 25$$

לכן הכמות הקטנה ביותר של דגים האפשרית מתקבלת כאשר מציבים בביטוי

במקרה זה, מספר הדגים הכולל הוא

וחלוקת הדגים הינה:

מספר החלוקה	מבצע החלוקה	מספר הדגים שלקח הדייג לעצמו	מספר הדגים שנותר לאחר החלוקה
1.	אמנון	$25 - 1 = 24$ $24:3 = 8$	16
2.	סלומון	$16 - 1 = 15$ $15:3 = 5$	10
3.	דניס	$10 - 1 = 9$ $9:3 = 3$	6

כמות התחלתית
25

הכמות השנייה בגודלה מתקבלת כאשר מציבים בביטוי לעיל

$$x = 7$$

$$\frac{3 \cdot (9 \cdot 7 + 5)}{4} + 1 = 52$$

במקרה זה, מספר הדגים הכולל הוא

וחלוקת הדגים הינה:

מספר הדגים שנותר לאחר החלוקה	מספר הדגים שלקח הדייג לעצמו	מבצע החלוקה	מספר החלוקה
34	$52 - 1 = 51$ $51:3=17$	אמנון	1.
22	$34 - 1 = 33$ $33:3 = 11$	סלומון	2.
14	$22 - 1 = 21$ $21:3 = 7$	דניס	3.

$$x = 4n - 1 \quad (n \text{ מספר טבעי})$$

ובאופן כללי, הערכים שניתן להציב בביטוי הם

$$\frac{3 \cdot (9(4n-1) + 5)}{4} + 1 = 27n - 2$$

ולכן המספרים האפשריים ככמות התחלתית הם

### באמצעות שיקולים

מבצעים את התהליך באופן אחר:

- מוסיפים 2 דגים לערימה לפני החלוקה הראשונה. במקרה זה, כמות הדגים מתחלקת ב-3.
  - מחלקים את הערימה ל-3 קבוצות ומורידים את 2 הדגים שהוספו. נותר דג אחד מיותר (שאותו אמנון זורק) ו-3 קבוצות זהות בגודלן.
  - לאחר שאמנון לקח את חלקו, חוזרים על תהליך זה גם בחלוקות של סלומון ודניס – לפני החלוקה מוסיפים 2 דגים, מחלקים ב-3, ומורידים את 2 הדגים שהוספו.
- מתהליך זה מסיקים כי מספר הדגים בערימה לאחר ש מוסיפים 2 דגים נוספים חייב להתחלק ב-3 שלוש פעמים.

$$3^3 = 27$$

המספר הקטן ביותר המתחלק ב-3 שלוש פעמים הוא

$$27 - 2 = 25$$

ולכן מספר הדגים הקטן ביותר האפשרי ככמות התחלתית הוא

$$27 \cdot 2 = 54$$

המספר השני בגודלו המתחלק ב-3 שלוש פעמים הוא

$$54 - 2 = 52$$

ולכן מספר הדגים, השני בגודלו, האפשרי ככמות התחלתית הוא

$$27n - 2 \quad (n \text{ מספר טבעי})$$

ובאופן כללי, המספרים האפשריים ככמות התחלתית הם

### 5. א. בונים טבלה זהה לטבלה שבמשימה 2, ומשלימים אותה

מספר הדגים שנותר לאחר החלוקה	מספר הדגים שלקח הדייג לעצמו	מבצע החלוקה	מספר החלוקה
381	$509 - 1 = 508$ $508:4=127$	אמנון	1.
285	$381 - 1 = 380$ $380:4 = 95$	סלומון	2.
213	$285 - 1 = 284$ $284:4 = 71$	דניס	3.
159	$213 - 1 = 212$ $212:4 = 53$	פלד	4.

מספר הדגים שקיבל כל שותף: אמנון – 127, סלומון – 95, דניס – 71, פלד – 53.

**ב. דרך אלגברית**

בוחרים את  $x$  לייצג את מספר הדגים שקיבל פלד, ומשלימים את טבלת החלוקה מהסוף להתחלה בדומה לתהליך במשימה 3.

מקבלים ביטוי למספר הדגים הכולל  $\frac{4 \cdot (64x + 37)}{27} + 1$

הערך הקטן ביותר עבור  $x$  שתוצאת הצבתו בביטוי היא מספר שלם הוא  $x = 26$

לכן הכמות הקטנה ביותר של דגים האפשרית הינה  $\frac{4 \cdot (64 \cdot 26 + 37)}{27} + 1 = 253$

(שאר הערכים המתאימים ל- $x$  הם  $x = 26, 53, 80, 107, \dots$ )

**באמצעות שיקולים**

באופן דומה לדרך הפתרון השנייה המוצגת במדריך למורה למשימה 4, אם מוסיפים 3 דגים נוספים לערימה מגלים שניתן לחלק את הערימה ב-4 ארבע פעמים.

המספר הקטן ביותר המתחלק ב-4 ארבע פעמים הוא  $4^4 = 256$

ולכן מספר הדגים הקטן ביותר האפשרי ככמות התחלתית הוא  $256 - 3 = 253$

**6. נוסחאות מתאימות לתאים B3, C3:**

	A	B	C	D
1	מספר החלוקה	מספר הדגים שלקח הדייג לעצמו	מספר הדגים הנותר לאחר החלוקה	
2	0			כמות התחלתית
3	1	$=(C2-1)/3$	$=B3*2$	
4	2			
5	3			



1. א. 22    ב. 19    ג. 13    ד. -11    ה. 22    ו.  $5\frac{1}{2}$

2. א. ערכים מתאימים ל- $x$  הם למשל, 8, 5, 2, -1, -4,  $x$ , ובאופן כללי  $x = 3k - 1$  ( $k$  מספר שלם).

ב. ערכים מתאימים ל- $x$  הם למשל, 14, 9, 4, -1, -6,  $x$ , ובאופן כללי  $x = 5k - 1$  ( $k$  מספר שלם).



פעולה	כד קטן (3 ליטרים)	כד בינוני (5 ליטרים)	כד גדול (8 ליטרים)
מצב התחלתי	0	0	8
מוזגים מהכד הגדול לכד הבינוני	0	5	3
מוזגים מהכד הבינוני לכד הקטן	3	2	3
מוזגים מהכד הקטן לכד הגדול	0	2	6
מוזגים מהכד הבינוני לכד הקטן	2	0	6
מוזגים מהכד הגדול לכד הבינוני	2	5	1
מוזגים מהכד הבינוני לכד הקטן	3	4	1
מוזגים מהכד הקטן לכד הגדול	0	4	4



1. מצאו, באופן שיטתי, מספרים אפשריים לכמות הכוללת של דגים לפני תחילת החלוקה.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{תשובה: ביטוי מתאים למספרים אפשריים לכמות הכוללת של דגים} \\ \text{כלומר, המספרים האפשריים הם } 25, 52, 79, \dots \\ \text{(מוסבר בפתרון למשימה 4)} \end{array} \right. \quad (n \text{ מספר טבעי}) \quad 27n - 2$$

2. פעילות נוספת העוסקת בחשיבה מהסוף להתחלה נמצאת ב אתר מתמטיקה משולבת, מדור מצוינות רחובות, חידות – חלק א', "אתגר 16".



משווים בין דרכי פתרון שונות שהוצגו בכיתה למציאת הכמות הקטנה ביותר של דגים על-פי הבחינות הבאות: יעילות, יופי מתמטי ("אלגנטיות"), בהירות (המידה שבה הפתרון אכן מסביר את משמעות התהליך), מידת קושי והעדפה אישית.