

3.2 הערך המוחלט



- העמקה במושג הערך המוחלט ובתכונותיו
- בחינה של הערך המוחלט כפונקציה וקישור בין ייצוג אלגברי וגרפי של פונקציות הכוללות ערך מוחלט
- השוואה בין פונקציות הכוללות ערך מוחלט לפונקציות ליניאריות
- פתרון משוואות ואי-שוויונים, הכוללים ערך מוחלט, בדרך גרפית ובדרך אלגברית
- הצגת מושג השיקוף באופן גרפי ואלגברי
- בחינת מושג המשוואה בגישה פונקציונלית.



תוכנת גיאומטריה דינמית (למשל, תוכנת GeoGebra [<http://GeoGebra.org>]).

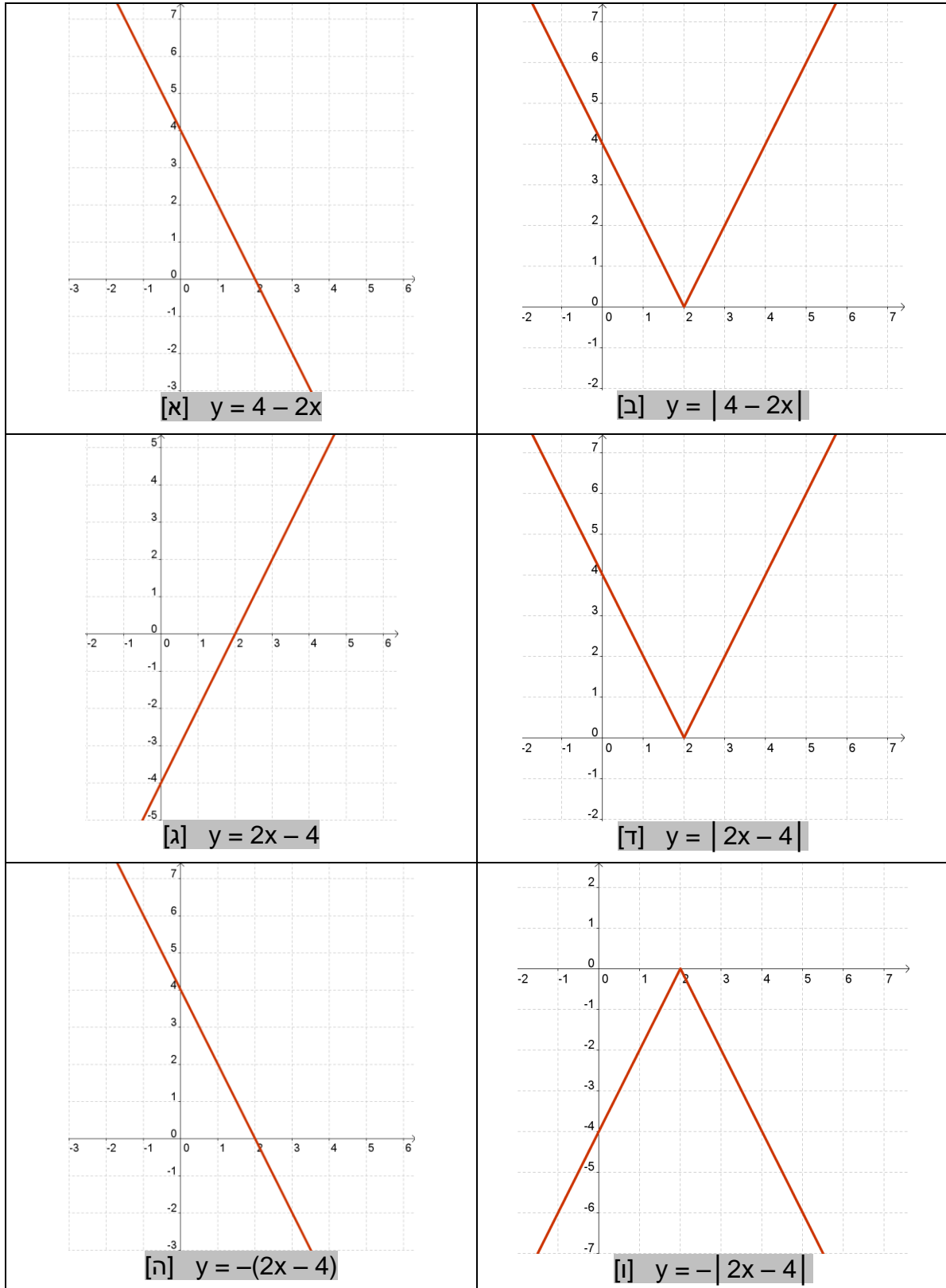


- דנים במשמעויות השונות של הערך המוחלט.
משמעות מספרית: ממחישים באמצעות מספר דוגמאות (למשל, $|4|$, $|-3|$, $|0|$, $|10|$, $|-13.5|$)
משמעות גרפית: על ציר המספרים, משמעות הערך המוחלט של מספר היא מרחק הנקודה המתאימה למספר מנקודת האפס.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad \text{משמעות אלגברית:}$$

- משמעות מילולית: הערך המוחלט של מספר חיובי או אפס הוא המספר עצמו. הערך המוחלט של מספר שלילי הוא המספר הנגדי לו.
- מסיקים תכונות של הערך המוחלט:
 - ערך מוחלט של מספר הוא תמיד אי-שלילי ($|x| \geq 0$)
 - למספרים נגדיים אותו ערך מוחלט ($|x| = |-x|$)
 - המשמעות של הביטוי האלגברי $|x - a|$ הוא המרחק של המספר x מ- a על ציר המספרים.
- משרטטים יחד עם התלמידים את גרף הפונקציה $y = |x|$.

1. הגרפים של שש הפונקציות משורטטים כאן.



הסברים	קשרים	גרפים
הביטויים המתארים את הפונקציות הם ביטויים זהים. $-(2x - 4) = -2x + 4 = 4 - 2x$	גרפים זהים.	א, ה
הביטויים המתארים את הפונקציות הם ביטויים נגדיים $-(4 - 2x) = 2x - 4$	הגרפים הם שיקוף אחד של השני ביחס לציר x, ונחתכים בנקודה (2, 0).	א, ג
הביטויים המתארים את הפונקציות הם זהים: $ 4 - 2x = -(4 - 2x) = 2x - 4 $	גרפים זהים.	ב, ד
הביטויים המתארים את הפונקציות הם ביטויים נגדיים.	הגרפים הם שיקוף אחד של השני ביחס לציר x, ונחתכים בנקודה (2, 0).	ד, ו
הביטוי $ 4 - 2x $ זהה לביטוי $4 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$, כאשר הביטוי $ 4 - 2x $ הוא נגדי לביטוי $4 - 2x \leq 0 \Rightarrow x \geq 2$, כאשר	הענף השמאלי של גרף ב' ($x \leq 2$) מתלכד עם גרף א' באותו התחום. והענף הימני של גרף ב' ($x \geq 2$) הוא שיקוף של גרף א' ביחס לציר x.	א, ב

ישנם שלושה סוגי קשרים אפשריים בין הגרפים:

- הגרפים מתלכדים. במקרה זה הביטויים המתארים את הפונקציות הם ביטויים זהים (זוגות הגרפים למקרה זה הם: א-ה, ב-ד)
- אחד הגרפים הוא שיקוף של השני ביחס לציר x ונחתכים בנקודה (2, 0). במקרה זה, הביטויים המתארים את הפונקציות הם ביטויים נגדיים (זוגות הגרפים למקרה זה הם: א-ג, ב-ו, ג-ה, ד-ו)
- בתחום אחד הגרפים מתלכדים, ובתחום השני הגרפים הם שיקוף אחד של השני ביחס לציר x. במקרה זה, הביטויים המתארים את הפונקציות הם ביטויים זהים בחלק מן התחום אחד ונגדיים בשאר התחום (זוגות הגרפים למקרה זה הם: א-ב, א-ד, א-ו, ב-ג, ב-ה, ג-ד, ג-ו, ד-ה, ה-ו)

3. א. תכונות המשולשים:

- המשולשים הנוצרים הם משולשים ישרי-זווית, משום שהצירים ניצבים זה לזה.
- בכל משולש, הניצב האנכי הוא באורך 4 יחידות, משום שנקודת החיתוך של הגרף עם ציר y היא (0, 4) או (0, -4).
- בכל משולש, הניצב האופקי הוא באורך 2 יחידות, משום שנקודת החיתוך של הגרף עם ציר x היא (2, 0).
- היחס בין אורכי הניצבים הוא 1:2.
- המשולשים חופפים על-פי משפט חפיפה צלע-זווית-צלע: בכל המשולשים אורך הניצב האנכי הוא 4 יחידות, אורך הניצב האופקי הוא 2 יחידות והזווית שביניהם היא ישרה.



.4

פתרון גרפי

פתרון אלגברי

$ 4 - 2x < 4 \Rightarrow$ $-4 < 4 - 2x < 4 \Rightarrow$ $0 < x < 4$	<p>א. $4 - 2x < 4$.</p> <p>מוצאים את הנקודות בגרף הפונקציה $y = 4 - 2x$ עבור $y < 4$. אלו הנקודות בעלות שיעור x, $0 < x < 4$.</p>
$ 2x - 4 > 2 \Rightarrow$ $2x - 4 > 2 \quad \text{או} \quad 2x - 4 < -2 \Rightarrow$ $x > 3 \quad \text{או} \quad x < 1$	<p>ב. $2x - 4 > 2$.</p> <p>מוצאים את הנקודות בגרף הפונקציה $y = 2x - 4$ עבור $y > 2$. אלו הנקודות בעלות שיעור x, $x > 3$ או $x < 1$.</p>
$ 2x - 4 = 2x - 4 \Rightarrow$ $2x - 4 = 2x - 4 \quad \text{וגם} \quad 2x - 4 \geq 0$ <p style="text-align: center;">או</p> $-(2x - 4) = 2x - 4 \quad \text{וגם} \quad 2x - 4 \leq 0$ \Downarrow $x \geq 2$	<p>ג. $2x - 4 = 2x - 4$.</p> <p>מוצאים את כל הנקודות בהן ערכי y זהים בגרפים של הפונקציות $y = 2x - 4$, $y = 2x - 4$. אלו הנקודות בעלות שיעור x, $x \geq 2$.</p>
$ 2x - 4 = 4 - 2x \Rightarrow$ $2x - 4 = 4 - 2x \quad \text{וגם} \quad 2x - 4 \geq 0$ <p style="text-align: center;">או</p> $-(2x - 4) = 4 - 2x \quad \text{וגם} \quad 2x - 4 \leq 0$ \Downarrow $x \leq 2$	<p>ד. $2x - 4 = 4 - 2x$.</p> <p>מוצאים את כל הנקודות בהן ערכי y זהים בגרפים של הפונקציות $y = 2x - 4$, $y = -2x + 4$. אלו הנקודות בעלות שיעור x, $x \leq 2$.</p>



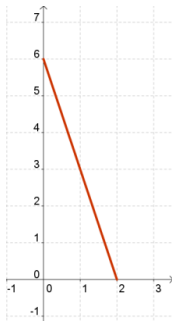
6. א. למשל, $y = |x + 4|$, $y = |-2x - 4|$.
- ב. למשל, $y = -|2x - 6|$, $y = -|4 - x|$.
- ג. למשל, $y = -|x| - 5$, $y = -4 - |3x|$.
- ד. למשל, $y = |x - 2| + 1$, $y = |2x - 4| + 4$.



1. א. $x > 15$ או $x < -15$. ב. $x > 16$ או $x < -14$. ג. $x > 6$ או $x < -9$.
2. א. 6 או -10. ב. 10 או -6. ג. 4 או -12. ד. -192 או -208.

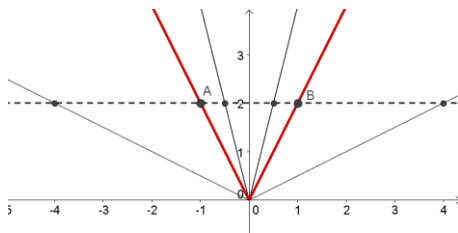


המחוג הקטן מסתובב 30° בשעה, כלומר, 0.5° בדקה.
המחוג הגדול מסתובב 360° בשעה, כלומר, 6° בדקה.
בעת ההתחלתית (בשעה 16:00) המחוג הקטן (הנמצא מול הספר 4) מקדים את המחוג הגדול (הנמצא מול המספר 12) ב- 120° .
מסמנים ב- x את מספר הדקות מהשעה 16:00 ועד הרגע שבו מחוגי השעון חולפים זה על פני זה.
מהשעה 16:00 ועד הרגע שבו מחוגי השעון חולפים זה על פני זה, המחוג הגדול מסתובב $6x$ מעלות והמחוג הקטן מסתובב $0.5x$ מעלות. אולם, המחוג הגדול הסתובב 120° יותר מהמחוג הקטן.
מכאן מקבלים את המשוואה $0.5x + 120 = 6x$
ופתרונה הוא $x \approx 21.8$
כלומר, מחוגי השעון חולפים זה על פני זה בנקודה שבין השעה 16:21 והשעה 16:22 (בשעה 16:21 ו- 48 שניות).



1. שרטטו במערכת צירים קטע ישר בין הנקודה (0, 6) ו-(2, 0).
רישמו ביטויים אלגבריים לפונקציות, בעלות גרף המכיל את הקטע הזה.

$$\left(\begin{array}{l} \text{(תשובות אפשריות: } -3x + 6, |6 - 3x|, |-6 + 3x|, \\ |3x - 6|, |3x - 2| \cdot 3, |3x - 9| - 3, |-3x| + 6, \\ -|3x + 6| + 12, -|3x + 9| + 15 \end{array} \right)$$



2. שרטטו גרפים של פונקציות ממשפחת הפונקציות $y = |ax|$ ($a \neq 0$).

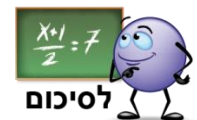
סמנו ב-A את הנקודה ברביע השני שבה שיעור ה-y הוא 2, וב-B את הנקודה ברביע הראשון שבה שיעור ה-y הוא 2.

חקרו את הקשר בין המקדם (a) של x ובין אורך הקטע AB.

$$\left(\begin{array}{l} \text{(תשובה: שיעורי הנקודה B הם } (2, \frac{2}{a}), \\ \text{שיעורי הנקודה A הם } (2, -\frac{2}{a}), \\ \text{ולכן אורך הקטע AB הוא } \frac{4}{a} \text{ (} 2 \cdot \frac{2}{a} \text{)}. \end{array} \right)$$

3. רישמו ביטוי אלגברי לפונקציה בעלת גרף הדומה בצורתו לאות W.

$$\left(\text{(תשובה אפשרית: } |x| - 4 \text{)} \right)$$



דנים בקשר שבין הייצוג הגרפי והאלגברי של פונקציות מהמשפחה $y = |ax + b|$.

- הגרפים של פונקציות אלו נראים בצורת V, כאשר קודקוד ה-V הוא בנקודת האפס של הפונקציה (כלומר בנקודה בה $y = 0$).
- ערך הפונקציה הוא אי שלילי ($|ax + b| \geq 0$) והגרפים של פונקציות אלו אינם עוברים מתחת לציר x.
- המקדם a של x קשור למפתח הקרניים של צורת ה-V.
- הערך המוחלט של המספר הקבוע ($|b|$) הוא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y.
- אם הביטויים הנמצאים בערך המוחלט הם נגדיים (למשל, $y = |2x - 4|$, $y = |4 - 2x|$) הגרפים הם זהים.
- כאשר הביטויים של הפונקציות הם נגדיים (למשל, $y = |2x - 4|$, לעומת $y = -|2x - 4|$) אז אחד הגרפים הוא שיקוף של השני ביחס לציר ה-x.
- גרף הפונקציה $y = |ax + b|$ מתלכד עם גרף הפונקציה $y = ax + b$ בחלקו של התחום בו $y = ax + b$ הוא חיובי; גרף הפונקציה $y = |ax + b|$ הוא שיקוף ביחס לציר ה-x של גרף הפונקציה $y = ax + b$ בחלקו של התחום בו $y = ax + b$ הוא שלילי.